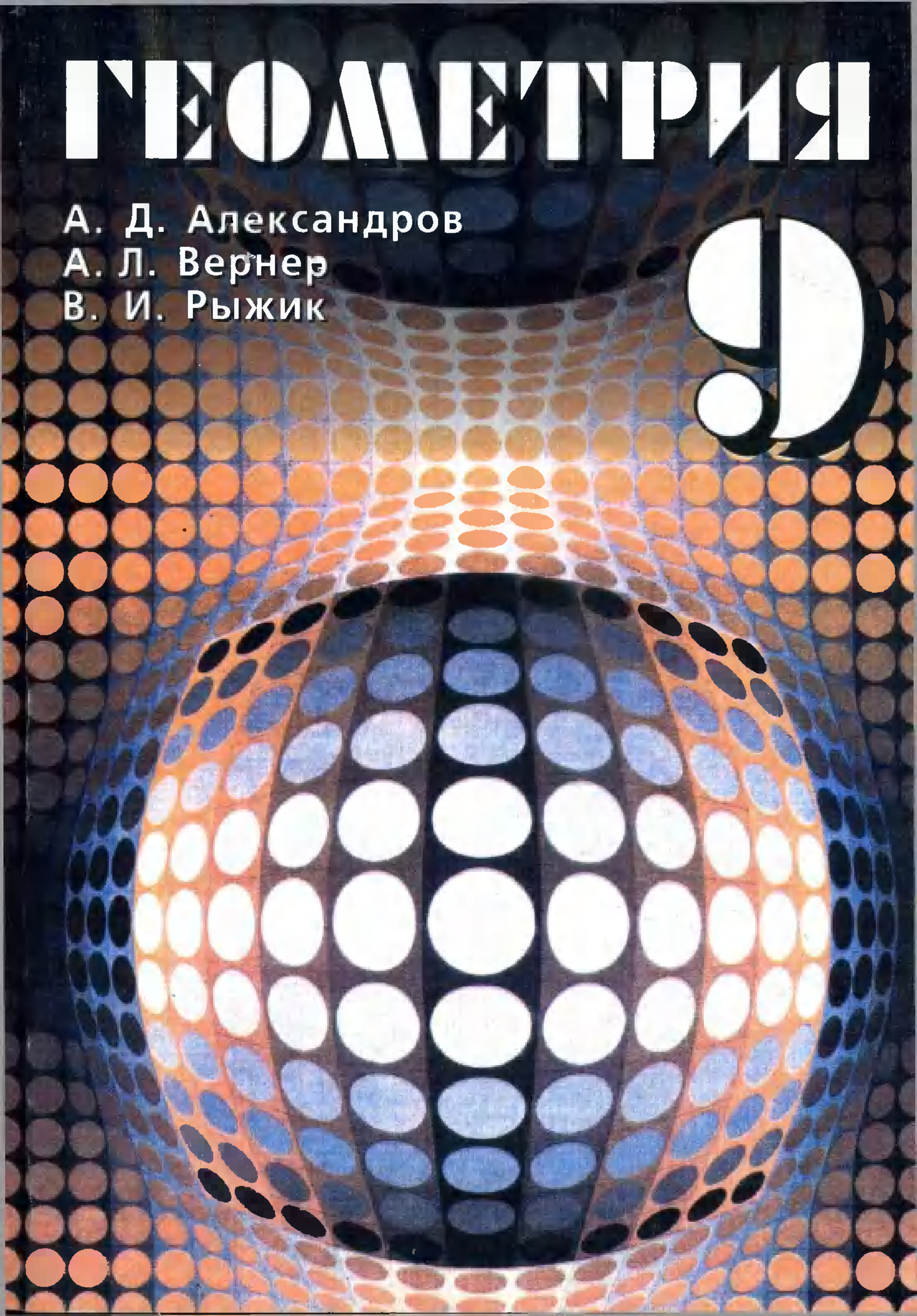
ГЕОМЕТРИЯ

А. Д. Александров
А. Л. Вернер
В. И. Рыжик

9



А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ·9

Экспериментальное
учебное пособие
для учащихся
IX класса
средних учебных
заведений

МИРОС

ЧеРо

МОСКВА 1997

Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.
Геометрия-9: Учебное пособие.— М.:МИРОС,ЧеРо, 1997.— 352 с.: ил.
ISBN 5-7084-0156-7

Учебное пособие завершает трехлетний систематический школьный курс планиметрии и обзорное изложение стереометрии. Пособие обеспечивает дифференцированное преподавание геометрии: последовательно-параллельное изложение материала ведется на трех уровнях — наглядном, прикладном, логическом. Набор задач по всем темам курса поможет учителю организовать практическую работу с учащимися.
Для учащихся IX классов и учителей.

Изд. № Ф30(03)
ISBN 5-7084-0156-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник завершает первую часть общеобразовательного курса геометрии. Как и предыдущие учебники этого авторского коллектива, он рассчитан на дифференцированное изучение предмета и содержит три уровня: гуманитарный (общеобразовательный), расширяющий его прикладной и логический (проблемный), углубляющий первый уровень освоения геометрических знаний. Любая из четырех глав «Геометрии-9» может изучаться достаточно независимо от остальных.

Помимо теоретического материала, учебник включает в себя задачник, составленный В. И. Рыжиком. В помощь учителям, работающим со школьниками по этому учебнику, подготовлены методические рекомендации, вышедшие в МИРОСе отдельной книгой под названием «От Евклида до Лобачевского».

В учебнике большое внимание уделяется не только важным понятиям современной геометрии — векторам, координатам, преобразованиям, но и методам, порожденным ими. Выбор для каждой конкретной задачи наиболее удобного метода ее решения — важный элемент общематематической культуры.

В книге сохранена структура, которая уже сложилась в учебниках «Геометрия-7» и «Геометрия-8». Автором комментариев является Т. Г. Ходот.

Глава 1

Векторы и координаты

ВВЕДЕНИЕ

Вспомните известные вам понятия, связанные с векторами и действиями с ними: какие векторы называются сонаправленными, противоположно направленными, коллинеарными и ортогональными? чем отличаются векторные величины от скалярных? как складывать векторы и умножать их на число? как находить угол между векторами? Попробуйте рассказать об этих понятиях и сделайте соответствующие рисунки, а затем прочтите текст введения и сопоставьте его с тем, что вы знаете о векторах.

Основные понятия и термины. Векторы. **Векторами** называются такие величины, которые характеризуются не только численным значением (при выбранной единице измерения), но и направлением. В физике такими величинами являются, например, сила и скорость (рис. 1). Сейчас слово «вектор» становится модным у журналистов и политиков, которые часто говорят о «векторе социальных движений», заменяя словом «вектор» слово «направленность».

Численное значение вектора называется его **модулем** или **абсолютной величиной**. Особый случай представля-

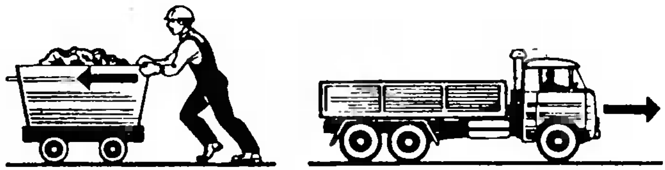


Рис. 1

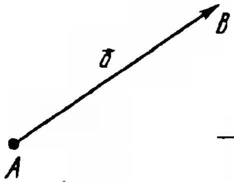


Рис. 2

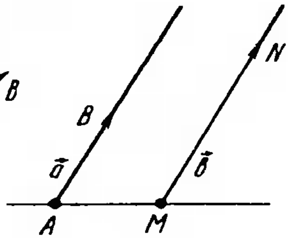


Рис. 3

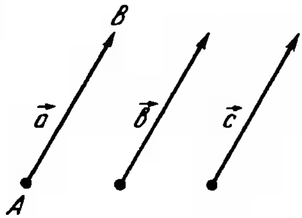


Рис. 4

ет **нулевой вектор**, или **нуль-вектор**. Его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

Направленные отрезки. Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками. **Направленным отрезком** называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый из них называется началом, а второй — концом направленного отрезка (рис. 2). Направленные отрезки тоже называют векторами, хотя это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в обыденной речи, показывая, например, слона на фотографии, говорят: «Это слон», и никто не говорит: «Это изображение слона».

Поэтому, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$, то пишем $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и про направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ говорим: «Вектор $\overrightarrow{AB}$». Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка AB.

С о н а п р а в л е н н о с т ь. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ называются **одинаково направленными** или **сонаправленными**, если лучи AB и MN сонаправлены (рис. 3). Для сонаправленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Р а в е н с т в о в е к т о р о в. Ненулевые векторы называются **равными**, если, во-первых, равны их длины и,

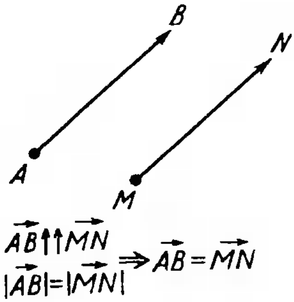


Рис. 5

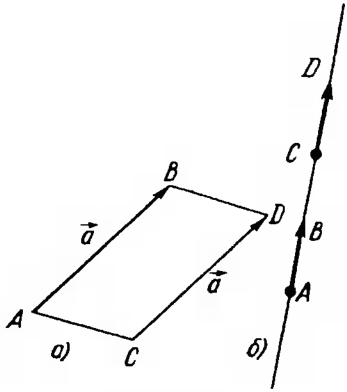


Рис. 6

во-вторых, они имеют одинаковое направление, т. е. сонаправлены (рис. 4). Равенство нулевых векторов определяется лишь первым из этих условий.

Итак, равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ означает, что выполняются два условия: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{MN}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$ (рис. 5). Второе условие проверяется лишь в случае, когда $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$.

Если задан вектор $\vec{a}$ (например, направленным отрезком $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$), то от *любой точки C можно отложить вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\vec{a}$* (рис. 6). Если точка C не лежит на прямой AB, то, чтобы отложить от нее вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $\vec{a}$, нужно построить параллелограмм $ABDC$ (рис. 6, *а*).

Рис. 6, *а* подсказывает следующий **признак равенства векторов**: *равенство*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \tag{1}$$

имеет место тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}. \tag{2}$$

Этот признак справедлив и для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащих на одной прямой (рис. 6, *б*).

Коллинеарность. Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, или **параллельными**, если изображающие их направленные отрезки параллельны или

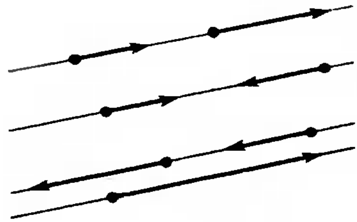


Рис. 7

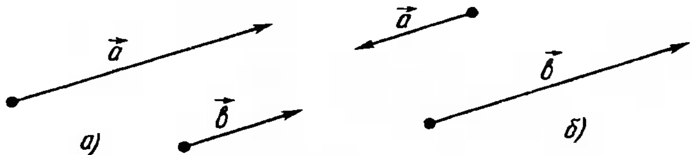


Рис. 8

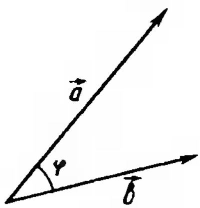


Рис. 9

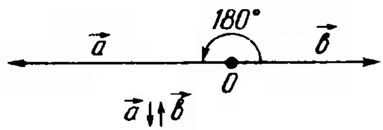


Рис. 10

лежат на одной прямой (рис. 7). Для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Два ненулевых коллинеарных вектора либо сонаправлены (рис. 8, *а*), либо **направлены противоположно** (рис. 8, *б*). Для противоположно направленных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется обозначение $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.

Угол между векторами. **Углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки (рис. 9). Если векторы сонаправлены, то угол между ними считается равным 0°. Если векторы направлены противоположно, то угол между ними равен 180° (рис. 10).

Угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются. Это следует из теоремы об углах с сонаправленными сторонами («Геометрия-8», п. 2.10).

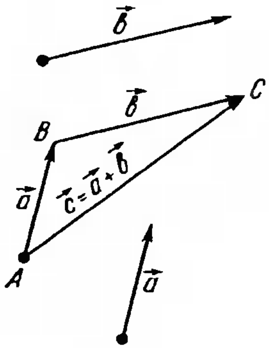


Рис. 11

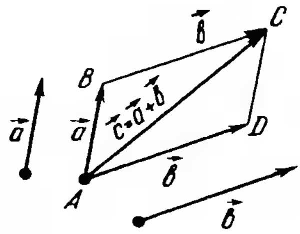


Рис. 12

Векторы, угол между которыми равен 90°, называются **перпендикулярными** или **ортогональными**. Нуль-вектор полагается ортогональным любому вектору.

Действия с векторами. С л о ж е н и е в е к т о р о в. Любые два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно сложить. Для этого сначала откладывают вектор a от некоторой точки A: $a = \overrightarrow{AB}$ (рис. 11). Затем от его конца — точки B — откладывают вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. **Суммой** $\vec{a} + \vec{b}$ **векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Этот способ сложения называется *правилом треугольника.*

Неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно сложить и по *правилу параллелограмма* (рис. 12), отложив их от точки A: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Рис. 12 напоминает также, что *сложение векторов коммутативно*, так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Сложение векторов, как и сложение чисел, не только коммутативно, но и ассоциативно, т. е. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (рис. 13).

П р о т и в о п о л о ж н ы е в е к т о р ы. Вектор, который в сумме с вектором a дает нуль-вектор, называется вектором, **противоположным вектору** $\vec{a}$, и обозначается $-\vec{a}$ (рис. 14). Можно

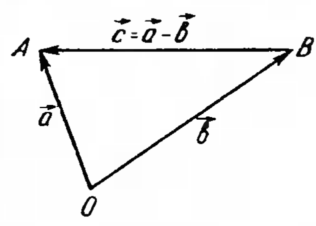


Рис. 13

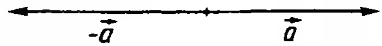


Рис. 14

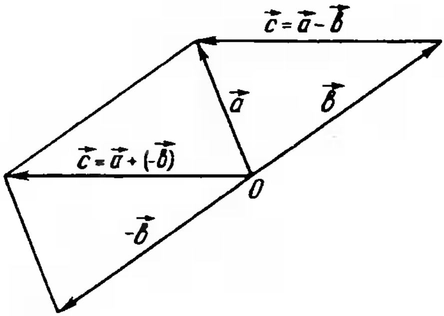


Рис. 15

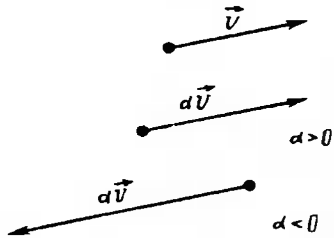


Рис. 16

сказать и так: два вектора, сумма которых равна нуль-вектору, называются **противоположными векторами.** Ясно, что ненулевые противоположные векторы имеют равные модули, но противоположные направления, т. е. $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}$.

Вычитание векторов. Вычитание векторов — это операция, обратная операции сложения векторов. Поэтому **разностью векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. Обозначается разность векторов так: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Чтобы построить разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо отложить их от одной точки. Пусть, например, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Тогда их разностью является вектор $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Можно поступить и так. *Чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, достаточно сложить вектор $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, противоположным вектору $\vec{b}$* (рис. 15). Проверьте, действительно ли $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Умножение вектора на число. **Произведением ненулевого вектора v на число** α называется такой вектор $\alpha\vec{v}$, модуль которого равен произведению модулей вектора $\vec{v}$ и числа α и который сонаправлен с вектором $\vec{v}$, если $\alpha > 0$, и направлен противоположно вектору $\vec{v}$, если $\alpha < 0$ (рис. 16).

Итак, если $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ и $\vec{v} \neq \vec{0}$, то, во-первых, $|\vec{u}| = |\alpha||\vec{v}|$ и, во-вторых, $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ при $\alpha > 0$, и $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$ при $\alpha < 0$.

Если же $\vec{v} = \vec{0}$ или $\alpha = 0$, то $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

Мы часто употребляем следующий простой **признак коллинеарности векторов:** *вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.*

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1.1. Составляющие вектора. Многие практические задачи с векторами показывают, что часто имеет значение не вся векторная величина, а лишь некоторая ее часть, или, иначе говоря, та или иная **составляющая** вектора. Например, когда лодка или пловец переплывают реку, а их сносит течение, для расчетов важно не все перемещение, а лишь смещение по отношению к берегу (рис. 17).

Когда взлетает самолет, нам важна вертикальная составляющая его перемещения (рис. 18, *а*), а когда тянут

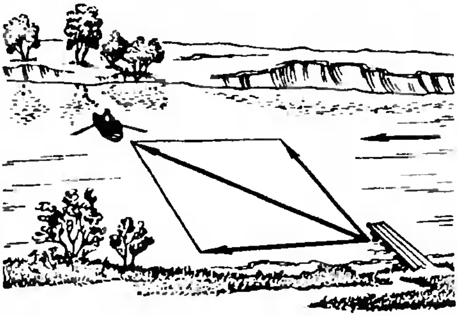


Рис. 17

Рис. 18

санки — горизонтальная составляющая силы, с которой натягивают веревку (рис. 18, *б*). Вертикальная же составляющая силы, с которой тянут санки, для их перемещения не важна. При подъемах же (на лифте, по лестнице, по горной дороге) важна именно вертикальная составляющая.

Составляющими данного вектора называются векторы, дающие в сумме данный вектор.

Например, если $ABCD$ — параллелограмм, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ являются составляющими вектора $\overrightarrow{AC}$, так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 12). Еще пример: если вектор $\vec{c}$ — разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ (см. рис. 14), то $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$, а потому векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — это составляющие вектора $\vec{a}$.

1.2. Разложение вектора на составляющие на плоскости. *На плоскости любой вектор можно разложить на сумму двух векторов, коллинеарных двум пересекающимся прямым.*

Действительно, пусть на плоскости задан вектор $\vec{v}$ и пусть прямые a и b пересекаются в точке O (рис. 19). Отложим вектор $\vec{v}$ от точки O: $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$. Если точка A не лежит на прямой b, то проведем через точку A прямую, параллельную прямой b. Она пересечет прямую a в некоторой точке P. Тогда $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}$. Итак, мы разложили вектор $\vec{v}$ на векторы $\vec{v}_a=\overrightarrow{OP}$ и $\vec{v}_b=\overrightarrow{PA}$:

$$\vec{v}=\vec{v}_a+\vec{v}_b. \qquad (1)$$

Говорим также, что мы разложили вектор $\vec{v}$ по прямым a и b.

В случае, когда точка A лежит на прямой b, составляющая $\vec{v}_a$ обращается в нуль-вектор и $\vec{v}=\overrightarrow{OA}=\vec{v}_b$.

Если прямые, по которым раскладывается вектор, взаимно перпендикулярны, например, являются осями прямоугольной системы координат (рис. 20), то составляющие вектора можно получить с помощью проектирования начала и конца вектора на координатные оси (рис. 21). Объясните это подробнее.

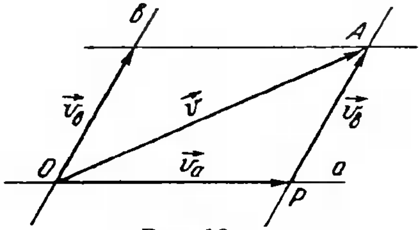


Рис. 19

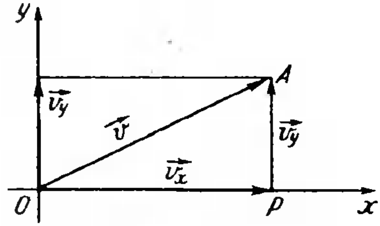


Рис. 20

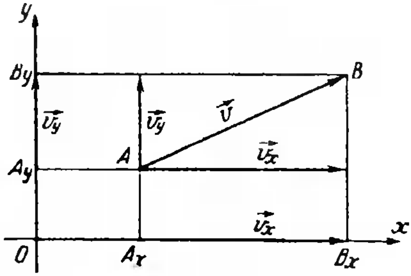


Рис. 21

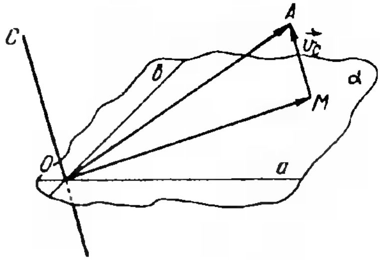


Рис. 22

Из свойств составляющих отметим только одно: *при сложении векторов их составляющие складываются.*

Действительно, если $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} = \vec{u}_a + \vec{u}_b$ и $\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b$, то

$$\vec{w} = (\vec{u}_a + \vec{u}_b) + (\vec{v}_a + \vec{v}_b),$$

а потому

$$\vec{w} = (\vec{u}_a + \vec{v}_a) + (\vec{u}_b + \vec{v}_b), \tag{2}$$

т. е.

$$\vec{w} = \vec{w}_a + \vec{w}_b,$$

где $\vec{w}_a = \vec{u}_a + \vec{v}_a$ и $\vec{w}_b = \vec{u}_b + \vec{v}_b$.

1.3. Разложение вектора на составляющие в пространстве. *В пространстве каждый вектор можно разложить на три вектора, коллинеарных трем пересекающимся прямым, не лежащим в одной плоскости* (рис. 22). Разложение вектора на составляющие в пространстве осуществляется аналогично разложению вектора на составляющие на плоскости. Повторим соответствующие построения.

Пусть три прямые a, b, c пересекаются в точке O и не лежат в одной плоскости. Возьмем произвольный вектор $\vec{v}$ и отложим его от точки O: $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Если точка A лежит на прямой c, то, очевидно, $\overrightarrow{OA} = \vec{v}_c$, $\vec{v}_a = \vec{0}$, $\vec{v}_b = \vec{0}$ и $\vec{v} = \vec{v}_c$.

Пусть точка A не лежит на прямой c. Проведем через точку A прямую, параллельную прямой c (рис. 23). Она пересечет плоскость α, в которой лежат прямые a и b, в некоторой точке M. Тогда $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, т. е. мы разложили вектор $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ на вектор $\vec{v}_c = \overrightarrow{MA}$ и вектор $\overrightarrow{OM}$, лежащий в плоскости α. Если теперь разложить вектор $\overrightarrow{OM}$ в плоскости α по прямым a и b в сумму $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$, то получим, что

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c, \tag{3}$$

где $\vec{v}_a = \overrightarrow{OP}$, $\vec{v}_b = \overrightarrow{PM}$ и $\vec{v}_c = \overrightarrow{MA}$.

Отметим, что при разложении вектора на плоскости по двум пересекающимся прямым a и b мы, по-существу, строим параллелограмм, диагональю которого является данный вектор и стороны которого лежат на данных прямых a и b (рис. 24, *а*). Аналогично при разложении вектора по трем пересекающимся прямым a, b, c в пространстве мы строим параллелепипед, диагональю которого является данный вектор и три ребра которого лежат на данных прямых (рис. 24, *б*).

Если прямые a, b, c взаимно перпендикулярны (например, являются осями прямоугольной пространственной системы координат), то составляющие вектора получаются, как и для плоскости, проектированием на эти прямые начала и конца вектора (рис. 25).

Объясните это подробнее, вспомнив теоремы, связывающие параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей.

Итак, в пространстве вектор можно разложить по прямой и пересекающей ее плоскости (рис. 26, *а*) и по трем пересекающимся прямым, не лежащим в одной плоскости (рис. 26, *б*).

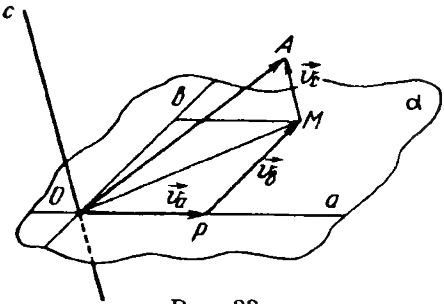


Рис. 23

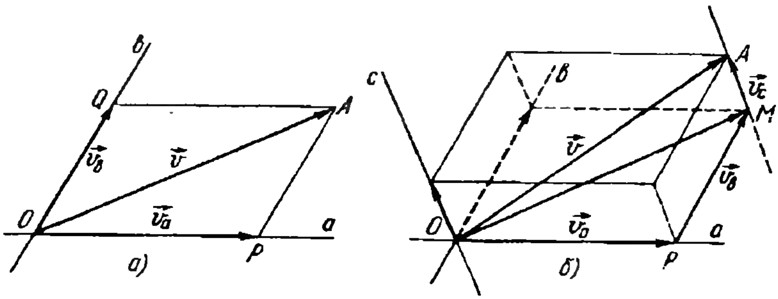


Рис. 24

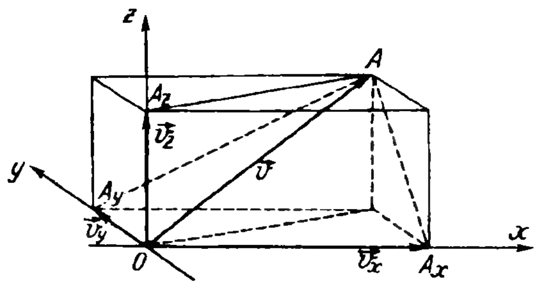


Рис. 25

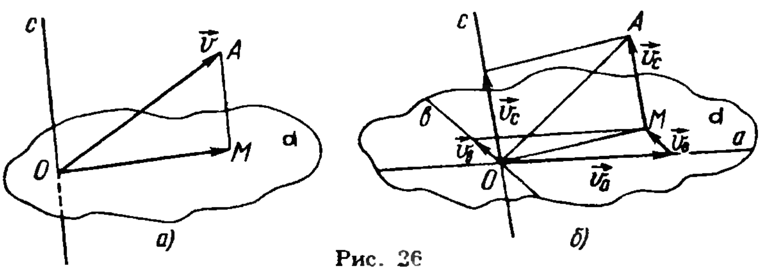


Рис. 26

1.4. Единственность разложения вектора на составляющие. На плоскости каждый вектор $\vec{v}$ можно лишь *единственным* образом разложить по двум пересекающимся прямым a и b. Это означает, что если имеются два разложения $\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b$ и $\vec{v} = \vec{v}_a{}' + \vec{v}_b{}'$, то

$$\vec{v}_a = \vec{v}_a{}', \quad \vec{v}_b = \vec{v}_b{}'. \tag{4}$$

Действительно, из равенства $\vec{v}_a + \vec{v}_b = \vec{v}_a{}' + \vec{v}_b{}'$ следует, что

$$\vec{v}_a - \vec{v}_a{}' = \vec{v}_b{}' - \vec{v}_b. \tag{5}$$

Но вектор $\vec{v}_a - \vec{v}_a{}'$ коллинеарен прямой a, а равный ему вектор $\vec{v}_b{}' - \vec{v}_b$ коллинеарен прямой b. Поэтому эти векторы коллинеарны одновременно и прямой a, и пересекающей ее прямой b. А это возможно лишь в том случае, когда векторы $\vec{v}_a - \vec{v}_a{}'$ и $\vec{v}_b{}' - \vec{v}_b$ — нулевые, т. е. имеют место равенства (4).

Итак, на плоскости каждый вектор единственным образом может быть разложен по двум пересекающимся прямым.

Аналогично рассуждая, можно доказать единственность разложения на составляющие вектора в пространстве по прямой и плоскости, а также по трем прямым, пересекающимся в одной точке и не лежащим в одной плоскости. Проведите самостоятельно соответствующие рассуждения.

§ 2. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Выполнять операции с векторами чисто геометрически не всегда удобно: например, если надо сложить десять или более векторов, да еще и умножить их на какие-то числа. Оказывается, действия с векторами можно свести к действиям с числами, соотнеся с векторами числа. Сопоставление осуществляется с помощью проектирования вектора на координатные оси. Первый шаг в этом направлении — проектирование вектора на одну координатную ось.

2.1. Проекция вектора на ось. Как мы уже говорили, проектирование вектора на ось обычно производят в том случае, когда важно выделить его составляющую по этой оси.

Итак, пусть задана некоторая ось x, т. е. прямая, на которой введена координата. Началом координат на оси x считаем точку O (рис. 27). Единичным вектором (или ортом) этой оси считаем вектор $\vec{i}$ с началом в точке O и концом в точке I с координатой 1. Рассмотрим произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$. Спроектируем точки A и B на ось x в точки A_1 и B_1.

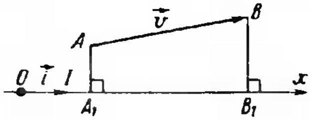


Рис. 27

Проекцией v_x вектора $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ на ось x называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком плюс в том случае, когда векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены, и взятая со знаком минус, если векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{i}$ направлены противоположно.

Итак,

$$v_x = \begin{cases} +\,|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{i}; \\ -\,|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}; \\ 0, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}, \text{ т. е. } A_1 = B_1. \end{cases}$$

Обратите внимание, что проекция точки — точка, проекция отрезка — отрезок (или точка); а проекция вектора — число.

Из определения проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x следует, что вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ получается из коллинеарного ему единичного вектора $\vec{i}$ умножением на $v_x = \pm\,|\overrightarrow{A_1B_1}|$. При этом если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{i}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = +\,|\overrightarrow{A_1B_1}|\,\vec{i}$. Если же $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = -\,|\overrightarrow{A_1B_1}|\,\vec{i}$. Следовательно, в обоих случаях имеет место равенство

$$\overrightarrow{A_1B_1} = v_x\vec{i}. \qquad (1)$$

Вычислить проекцию вектора на ось помогает следующая теорема.

ТЕОРЕМА. **Проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью (т. е. между вектором и единичным вектором оси).**

Доказательство этой теоремы сводится к нескольким случаям, представленным на рис. 28. Оно излагается подробно в следующем пункте.

Следствие. *Равные векторы имеют равные проекции на ось.*

Действительно, проекция вектора на ось зависит лишь от длины вектора и угла, который он образует с данной осью. Равные же векторы, во-первых, имеют равные длины, а во-вторых, образуют с осью один и тот же угол (рис. 29). Следовательно, их проекции на ось равны.

Итак, *проекция вектора на ось не зависит от точки откладывания вектора.* Это позволяет легко получить следующее свойство.

Свойство 1. *При сложении векторов их проекции на одну и ту же ось складываются.*

Доказательство. Сложим два вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 30). Пусть точки A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на ось x, имеющую единичный вектор $\vec{i}$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = b_x\vec{i}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = c_x\vec{i}$, где $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Поскольку $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$, то $c_x\vec{i} = a_x\vec{i} + b_x\vec{i}$, а потому $c_x\vec{i} = (a_x + b_x)\vec{i}$. Следовательно,

$$c_x = a_x + b_x. \qquad (2)$$

Свойство 2. *При умножении вектора на число его проекция умножается на это число.*

Доказательство. Пусть x — ось с начальной точкой O и единичным вектором $\vec{i}$. Возьмем любой вектор $\vec{a}$ и отложим его от точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 31, a). Пусть φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{i}$. Умножим вектор $\vec{a}$ на число α. Получим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \alpha a$. Докажем, что $b_x = \alpha a_x$. Возможны следующие случаи.

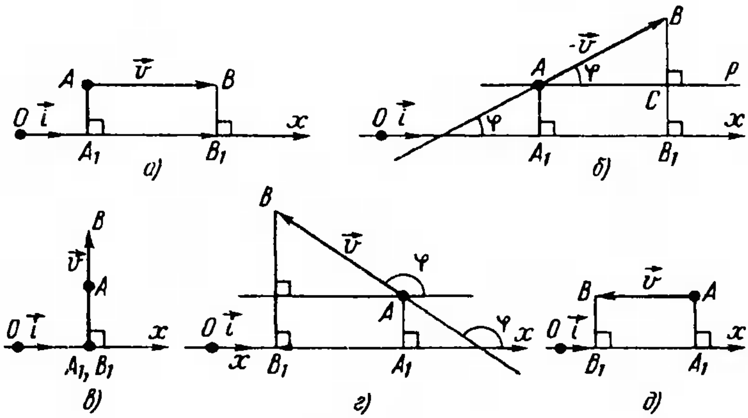


Рис. 28

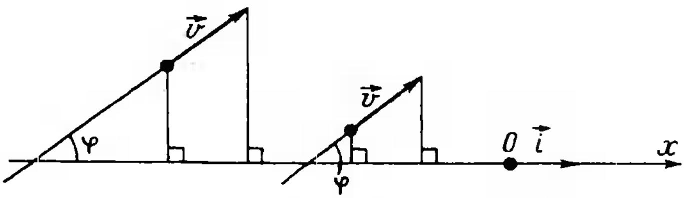


Рис. 29

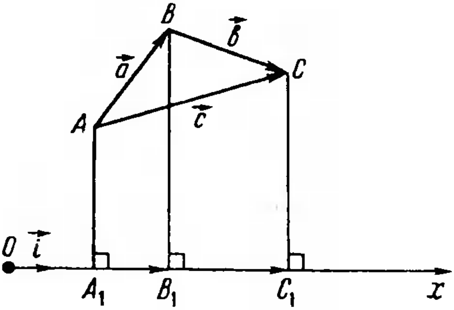


Рис. 30

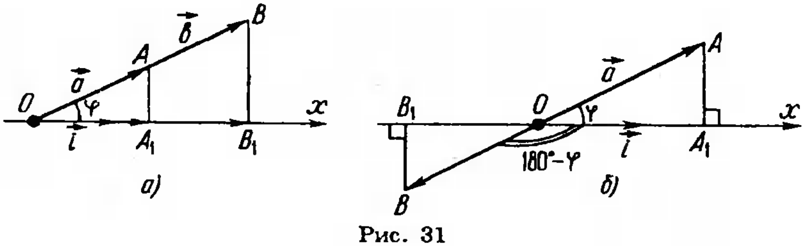


Рис. 31

1) $\alpha > 0$ (рис. 31, *а*). Тогда $\angle \vec{b}\,\vec{i} = \varphi$. Кроме того, $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$, т. е. $OB = \alpha OA$. Поэтому

$$b_x = |\vec{b}| \cos\varphi = OB \cos\varphi = \alpha\, OA \cos\varphi = \alpha a_x.$$

2) $\alpha < 0$ (рис. 31, *б*). В этом случае $\angle \vec{b}\,\vec{i} = 180° - \varphi$. Кроме того, $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$, т. е. $OB = |\alpha|OA$. А так как $\alpha < 0$, то $|\alpha| = -\alpha$, и потому $OB = -\alpha OA$. Следовательно,

$$b_x = |\vec{b}| \cos(180° - \alpha) = OB \cos\varphi = \alpha\, OA \cos\varphi = \alpha a_x.$$

3) Если $\alpha = 0$, то $\vec{b} = \alpha\vec{a} = \vec{0}$, и потому $b_x = 0$ и $b_x = \alpha a_x$.

Комментарий

Вы заметили, что слово «орт» (прямой, правильный) здесь употребляется в новом для нас смысле: единичный вектор?

Отметим еще, что проекция нулевого вектора на любую ось равна нулю согласно определению проекции вектора.

2.2. Доказательство теоремы о проекции вектора.

Дано: вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{i}$ — единичный вектор оси x, φ — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{i}$.

Доказать:

$$v_x = |v_x| \cos\varphi. \quad (3)$$

В зависимости от того, какой угол образует вектор и ось, доказывать теорему будем следующим образом.

1) Угол $\varphi = 0°$ (см. рис. 28, *а*). Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{i}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $v_x = |\vec{v}|$. Так как $\cos 0° = 1$, равенство (3) справедливо.

2) Угол φ — острый (см. рис. 28, *б*). Пусть точка A не лежит на оси x. Через точку A проведем прямую p, параллельную оси x. Пусть точка C — проекция точки B на прямую p. Получим прямоугольный треугольник ABC с углом φ при вершине A, и прямоугольник AA_1B_1C. Тогда

$$v_x = |\overrightarrow{A_1B_1}| = AC = AB \cos\varphi = |\vec{v}| \cos\varphi,$$

т. е. равенство (3) выполняется.

Если же точка A лежит на оси x, то равенство (3) вытекает из прямоугольного треугольника ABB_1 (см. рис. 28, *в*).

3) Угол $\varphi = 90°$. В этом случае $\overrightarrow{AB} \perp \vec{i}$, $A_1 = B_1$ и $v_x = 0$. И так как $\cos 90° = 0$, равенство (3) выполняется (см. рис. 28, *г*).

4) Угол φ тупой. Через точку A проводим прямую p, параллельную оси x, и проектируем на нее точку B в точку C (см. рис. 28, *д*). Получим прямоугольный треугольник ABC. Его угол при вершине A равен $180° - \varphi$. Поэтому

$$AC = AB\cos(180° - \varphi) = -AB\cos\varphi.$$

В рассматриваемом случае $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$, и поэтому

$$v_x = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -AC = AB\cos\varphi = |\vec{v}|\cos\varphi,$$

т. е. выполняется равенство (3). Если точка A лежит на прямой x, то доказательство лишь упрощается.

5) Угол $\varphi = 180°$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$. В этом случае $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $v_x = -|\vec{v}|$. Так как $\cos 180° = -1$, то равенство (3) снова имеет место.

2.3. Координаты вектора. Зададим на плоскости систему координат x, y (рис. 32). Конечно, на плоскости проекция вектора на одну координатную ось не определяет вектора, так как различные векторы могут иметь одну и ту же проекцию (рис. 33). Но проекции v_x и v_y на две координатные оси уже однозначно зададут вектор $\vec{v}$ (рис. 34).

Действительно, обозначим единичные векторы (орты) координатных осей x и y через $\vec{i}$ и $\vec{j}$: $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ (рис. 35). Возьмем вектор $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ и разложим его по осям координат, спроектировав его начало P и конец Q на оси координат в точки P_1, P_2 и Q_1, Q_2. Получим

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2}. \qquad (4)$$

По определению проекции вектора

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = v_x\vec{i}, \quad \overrightarrow{P_2Q_2} = v_y\vec{j}. \qquad (5)$$

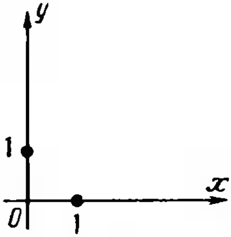


Рис. 32

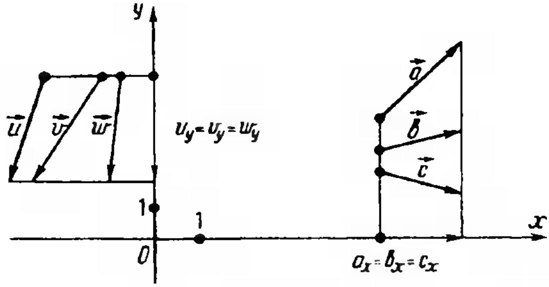


Рис. 33

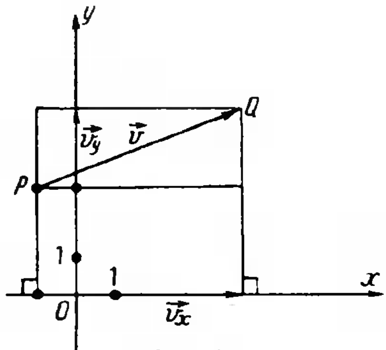


Рис. 34

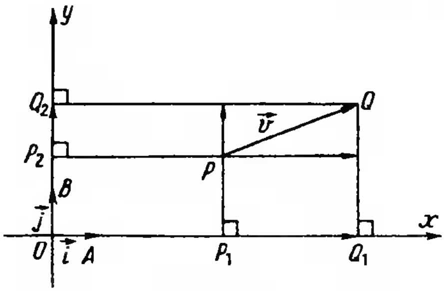


Рис. 35

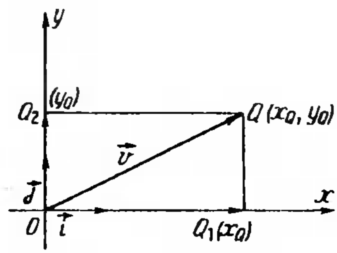


Рис. 36

Поэтому

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \tag{6}$$

Проекции v_x и v_y вектора $\vec{v}$ на оси координат называются также его **координатами**.

Все это совершенно аналогично тому, как каждой точке на плоскости ставится в соответствие пара ее координат. И каждому вектору, после того как выбраны координатные оси, тоже ставится в соответствие пара координат вектора или, что то же самое, пара его проекций на оси координат.

Верно и обратное: *если даны координаты v_x и v_y вектора в некоторой системе координат, то вектор $\vec{v}$ находится по этим координатам по формуле* (6).

Как найти координаты вектора? Если вектор $\vec{v}$ отложен от начала координат, т. е. $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, то его координатами являются координаты его конца — точки Q, т. е.

$$v_x = x_Q, \quad v_y = y_Q. \tag{7}$$

Действительно, пусть точка Q_1 — проекция точки Q на ось x (рис. 36). Ее координата x_Q равна длине направленного отрезка $\overrightarrow{OQ_1}$, взятой со знаком плюс, если он сонаправлен с вектором $\vec{i}$, и взятой со знаком минус, если направление $\overrightarrow{OQ_1}$ противоположно направлению $\vec{i}$. Но точно так же определяется и проекция v_x вектора $\vec{v}$ на ось x. Поэтому $x_Q = v_x$. Второе из равенств (7) доказывается аналогично.

Если же вектор $\vec{v}$ отложен от произвольной точки P: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, то его координаты являются разностями соответствующих координат конца и начала этого вектора, т. е.

$$v_x = x_Q - x_P, \quad v_y = y_Q - y_P. \tag{8}$$

Ранее доказанные равенства (7) являются частными случаями равенств (8), когда начало вектора имеет нулевые координаты.

Докажем, например, первое из равенств (8). По определению проекции вектора на ось $v_x = \pm|\overrightarrow{P_1Q_1}|$. Как известно,

$$|\overrightarrow{P_1Q_1}| = |P_1Q_1| = |x_Q - x_P|. \tag{9}$$

Если $\overrightarrow{P_1Q_1} \upuparrows \vec{i}$, то $x_Q > x_P$ и $|x_Q - x_P| = x_Q - x_P$, а также $v_x = +|P_1Q_1|$. Поэтому $v_x = x_Q - x_P$.

Если же $\overrightarrow{P_1Q_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$, то $x_Q < x_P$ и $|x_Q - x_P| = -(x_Q - x_P)$, а также $v_x = -|P_1Q_1|$. Поэтому снова $v_x = x_Q - x_P$.

Итак, первое из равенств (8) доказано, второе доказывается аналогично.

Вектор $\vec{v}$, имеющий проекции v_x; v_y, обозначаем так: $\vec{v} = (v_x;\ v_y)$.

2.4. Свойства координат векторов. Поскольку координаты вектора являются его проекциями на оси координат, свойства координат вектора повторяют свойства его проекций. Во-первых, отметим, что *координаты равных векторов соответственно равны*, а также верно и обратное: *векторы, имеющие соответственно равные координаты, равны.*

Поскольку при сложении векторов их проекции складываются, первое свойство координат векторов звучит так:

Свойство 1. *При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.* А именно, если $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y)$, т. е.

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y. \tag{10}$$

Свойство 2. *При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Это свойство вытекает из свойства 2 для проекции вектора.

Сформулируем признак **коллинеарности векторов**: *ненулевые векторы $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ и $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е. выполняются равенства*

$$b_x = \alpha a_x, \quad b_y = \alpha a_y. \tag{11}$$

Действительно, если выполняются равенства (11), то, по свойству 2 вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, т. е. $\vec{b} \parallel \vec{a}$. И наоборот, если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, а тогда выполняются равенства (11).

Свойство 3. *Квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат:*

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{12}$$

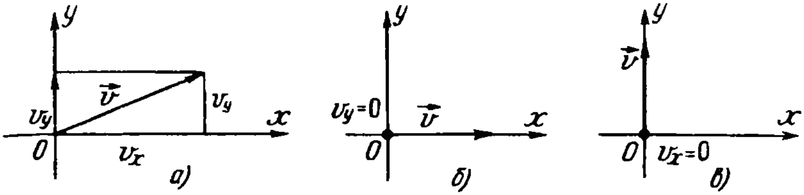


Рис. 37

Равенство (12) вытекает из теоремы Пифагора (рис. 37). Рассмотрите различные случаи расположения вектора $\vec{v}$ на рис. 37, *а*, *б*, *в*.

Следствием равенств (8) и (12) является формула для вычисления расстояния между точками P и Q через координаты этих точек:

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - y_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}. \qquad (13)$$

2.5. Свойства линейных операций с векторами. Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются **линейными операциями.** Определив координаты вектора, мы достигли той цели, которую ставили в начале параграфа: свести линейные операции с векторами к аналогичным операциям с числами. Покажем, как это делается на примере ряда свойств линейных операций с векторами. Вот эти свойства:

1) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

3) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Эти три свойства справедливы для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел α, β. Докажем, например, последнее свойство.

Пусть $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y)$, так как при сложении векторов их координаты складываются. Далее, поскольку при умножении вектора на число, его координаты умножаются на это число, то $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha a_x + \alpha b_x;\ \alpha a_y + \alpha b_y)$. Но $\alpha a_x + \alpha b_x$ и $\alpha a_y + \alpha b_y$ являются координатами вектора $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$. Поэтому имеет место равенство $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Свойства 1 и 2 докажите самостоятельно.

Изученные нами операции с векторами составляют основу **векторной алгебры** — раздела математики, изучающей действия с векторами. Аппарат векторной алгебры удобен при решении задач не только в геометрии и физике, но и в других разделах науки и техники. Например, векторные методы применяются при решении экономических задач.

2.6. Вопросы, вопросы, вопросы... Аффинные координаты. Определив в § 1 разложение векторов на составляющие в самом общем виде, мы затем ввели координаты векторов, используя лишь частный случай разложения векторов по взаимно перпендикулярным прямым. Поступая таким образом, мы как бы выделили среди всех параллелограммов прямоугольник (см. рис. 35) или, другими словами, из параллельных проектирований выбрали лишь частный случай — ортогональное проектирование.

Почему мы так поступили? Потому, что геометрические построения в § 1 проводятся одинаково для любых пересекающихся прямых — осей, а вычислительные формулы (3) в п. 2.2 и (12) — (13) в п. 2.4 верны лишь для ортогонального проектирования и прямоугольной системы координат, так как в этом случае можно применить теорему Пифагора.

Тем не менее координаты векторов можно определить не только для прямоугольной системы координат, но и в более общей ситуации. Делается это так.

Выберем в плоскости два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проведем параллельные им прямые x и y (рис. 38). Любой вектор $\vec{v}$ в плоскости можно разложить на составляющие по прямым x и y:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y. \qquad (14)$$

Так как $\vec{v}_x \parallel \vec{a}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{v}_x = x\vec{a}$. Аналогично $\vec{v}_y = y\vec{b}$. Подставляя эти выражения в формулу (14),

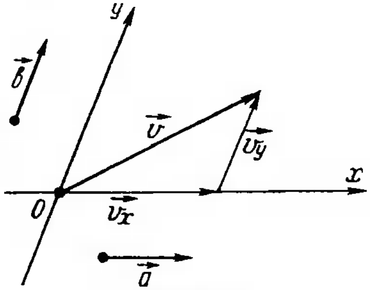


Рис. 38

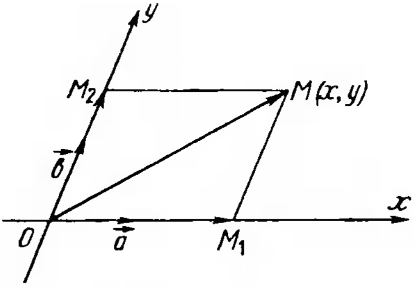


Рис. 39

получаем представление вектора $\vec{v}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{15}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем **базисными векторами**, или **базисом**, а числа x и y — **координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$**.

Докажем, что координаты вектора в данном базисе определяются единственным образом. Предположим, что, кроме представления (15), вектор $\vec{v}$ допускает еще одно аналогичное выражение

$$\vec{v} = x'\vec{a} + y'\vec{b}. \tag{16}$$

Из равенств (15) и (16) следует равенство

$$(x - x')\,\vec{a} = (y' - y)\,\vec{b}. \tag{17}$$

Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, равенство (17) возможно лишь в случае, когда в левой и правой частях этого равенства стоят нулевые векторы, т. е. когда $x - x' = y - y' = 0$. А это означает, что $x = x'$ и $y = y'$. Итак, координаты вектора $\vec{v}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ определяются единственным образом.

Определим теперь косоугольные координаты точек на плоскости, считая прямые x и y координатными осями, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — базисными векторами на этих осях (рис. 39). Прямую x, как обычно, назовем осью x, а прямую y — осью y. Точку пересечения осей x и y обозначим через O. Взяв любую точку M, проведем вектор $\overrightarrow{OM}$, а затем разложим его по осям x и y:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{18}$$

Числа x и y называются **косоугольными координатами точки** M (или **аффинными координатами точки** M) в системе с началом в точке O и базисными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Прямоугольные координаты являются частным случаем аффинных координат, если оси x и y взаимно перпендикулярны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные.

Аффинные координаты векторов и точек связаны теми же соотношениями, что и прямоугольные координаты (см. равенства (8) п. 2.3): если вектор $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, то $v_x = x_Q - x_P$, $v_y = y_Q - y_P$. Кроме того, отметим, что при сложении векторов их соответствующие аффинные координаты складываются, а при умножении вектора на число его аффинные координаты умножаются на это число. Проведите доказательства этих свойств самостоятельно.

2.7. Координаты векторов в пространстве. Одним из основных преимуществ векторной алгебры является ее единообразие для пространств различной размерности: действия с векторами и их свойства вполне аналогичны и в одномерном пространстве (на прямой), и в двумерном (на плоскости), и в трехмерном, и даже, как вы узнаете, если будете изучать геометрию в вузе, в n-мерном. В чисто векторных соотношениях нет никаких отличий для пространств разных размерностей.

Если же заменять действия с векторами действиями с их координатами, то при возрастании размерности пространства растет и число координат у векторов. Поясним это подробнее.

Прямоугольная система координат в пространстве задается тремя взаимно перпендикулярными осями координат x, y, z, пересекающимися в одной точке O — начале координат (рис. 40). Первой координатной осью считается ось x, второй — ось y, третьей — ось z. Обыч-

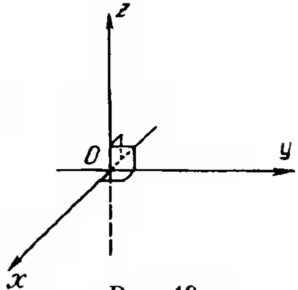


Рис. 40

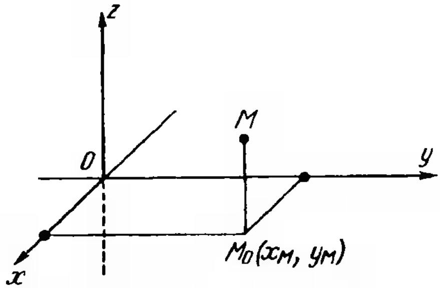


Рис. 41

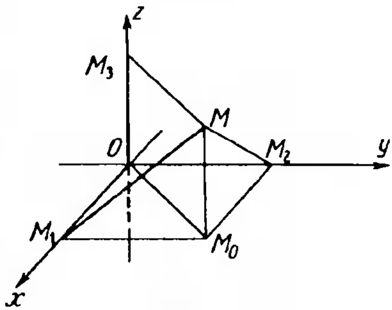


Рис. 42

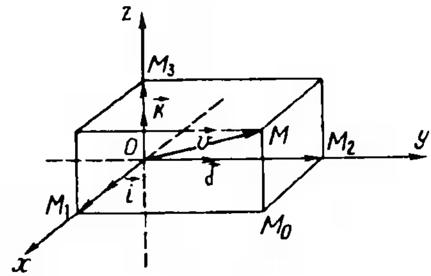


Рис. 43

но ось z рисуют направленной вертикально вверх, а координатную плоскость xy, проходящую через оси x и y, — горизонтальной.

Координаты любой точки M в пространстве определяются так. Сначала точка M проектируется на плоскость xy в точку M_O (рис. 41). Координатами x_M и y_M точки M будут координаты точки M_O на плоскости xy, а координатой z_M является длина отрезка M_OM, взятая со знаком плюс, если точка M лежит выше плоскости xy, и со знаком минус, если точка M лежит ниже плоскости xy (см. рис. 41). Если же $M_O = M$, то $z_M = 0$.

Найти координаты точки M можно также, спроектировав ее на оси координат в точки M_1, M_2, M_3 (рис. 42): их координаты x_M, y_M, и z_M на осях координат являются координатами точки M в пространстве. Подумайте, почему.

Перейдем теперь к векторам. Зададим на каждой из координатных осей единичный вектор: на оси x — вектор $\vec{i}$, на оси y — вектор $\vec{j}$, на оси z — вектор $\vec{k}$ (рис. 43).

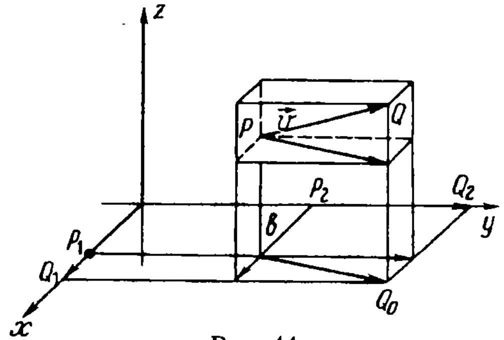


Рис. 44

Возьмем произвольный вектор $\vec{v}$ и отложим его от начала координат: $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$. Рассмотрим общий случай, когда точка M не лежит в координатных плоскостях. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по осям координат. Для этого построим прямоугольный параллелепипед с диагональю OM и ребрами на осях координат. Приходим к равенству:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3.$$

Векторы $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$, $\overrightarrow{OM}_3$ отличаются от векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лишь числовыми множителями v_x, v_y, v_z соответственно:

$$\overrightarrow{OM}_1 = v_x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM}_2 = v_y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM}_3 = v_z\vec{k}.$$

Числа v_x, v_y, v_z являются длинами векторов $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$, $\overrightarrow{OM}_3$, взятыми со знаками плюс или минус в зависимости от того, сонаправлены они с векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ или нет соответственно. Эти числа называются **проекциями вектора** $\vec{v}$ на координатные оси x, y, z, а также **координатами вектора** $\vec{v}$ в системе координат x, y, z. Они являются также координатами точки M, т. е.

$$v_x = x_M; \quad v_y = y_M; \quad v_z = z_M. \tag{19}$$

Проведите все сделанные выше построения для случая, когда вектор $\vec{v}$ отложен от произвольной точки P: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ (рис. 44). Убедитесь, что в этом случае его ко-

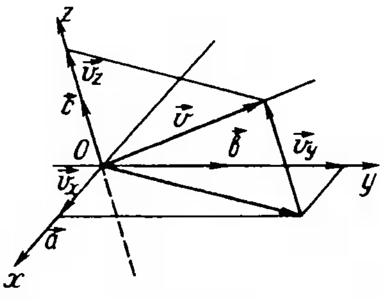


Рис. 45

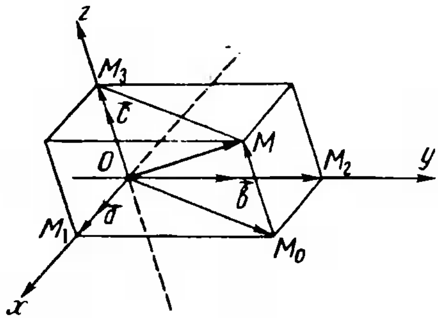


Рис. 46

ординаты и проекции на оси координат вычисляются по формулам:

$$v_x = x_Q - x_P; \quad v_y = y_Q - y_P; \quad v_z = z_Q - z_P. \qquad (20)$$

Ясно, что свойства координат вектора в пространстве (или, что то же самое, его проекций на оси координат), те же самые, что и на плоскости. Перечислите эти свойства.

В пространстве, как и на плоскости, можно ввести косоугольные (аффинные) координаты. Задать их можно, выбрав любые три прямые x, y, z, проходящие через некоторую точку O и не лежащие в одной плоскости (рис. 45). На осях x, y, z зададим ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Тогда любой вектор $\vec{v}$ может быть представлен в виде

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \qquad (21)$$

Числа x, y, z называются координатами вектора $\vec{v}$ относительно базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Для любой точки M находят координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и эти координаты x_M, y_M, z_M называют **аффинными координатами точки** M относительно системы с началом в точке O и базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 46).

И в аффинных координатах для вектора $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ справедливы равенства (20).

§ 3. СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.1. Определение скалярного произведения. Одна из важнейших задач физики — вычисление работы. Вот простейшая из таких задач: найти работу, выполненную при перемещении некоторого груза (рис. 47). В этой задаче участвуют две векторные величины: сила $\vec{f}$ и перемещение груза $\vec{s}$. Если $\vec{f}$ и $\vec{s}$ сонаправлены (рис. 47, *а*), то, как известно из механики, работа A, произведенная силой $\vec{f}$ при перемещении $\vec{s}$ вычисляется по формуле

$$A = |\vec{f}||\vec{s}|.$$

Если же угол φ между векторами $\vec{f}$ и $\vec{s}$ отличен от нуля (рис. 47, *б*), то для определения работы A важна лишь проекция силы $\vec{f}$ на направление $\vec{s}$ и эта работа вычисляется по формуле

$$A = (|\vec{f}| \cos \varphi)\, |\vec{s}|. \qquad (1)$$

Скалярная величина, стоящая в правой части равенства (1) и определяемая парой векторов $\vec{f}$ и $\vec{s}$ называется их **скалярным произведением.**

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов называется произведение их модулей и косинуса угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение полагается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}; \vec{b})$. Мы будем использовать обозначение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Итак, если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \qquad (2)$$

Когда вектор $\vec{a}$ скалярно умножается сам на себя, то говорят о скалярном квадрате вектора $\vec{a}$ и записывают выражение: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$. Так как в этом случае угол $\varphi = 0°$,

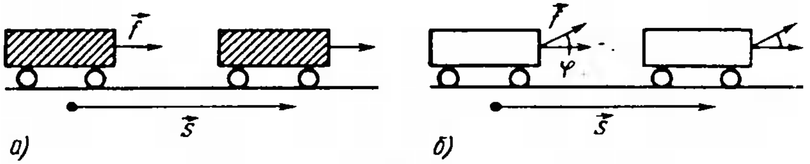


Рис. 47

а $\cos 0° = 1$, то из равенства (2) следует, что *скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля*:

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2. \qquad (3)$$

Если вектор $\vec{a}$ задан своими координатами a_x, a_y, то, поскольку квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его проекций на оси координат (или, что то же самое, сумме квадратов его координат),

$$\vec{a}^{\,2} = a_x^2 + a_y^2. \qquad (4)$$

Из равенства (2) следует также признак перпендикулярности векторов: *два вектора взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Действительно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из равенства (2) следует, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\cos \varphi = 0$, а это, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$. Нулевой же вектор считается перпендикулярным (как и коллинеарным) любому другому вектору.

Операция скалярного умножения векторов очень удобна при решении многих геометрических задач. Убедимся в этом, начиная с сопоставления скалярного умножения и обобщенной теоремы Пифагора.

Комментарий

Здесь мы опять встретились с определением, состоящим из двух частей: для ненулевых векторов и векторов, из которых хотя бы один нулевой, скалярное произведение определяется различно. С какими аналогичными определениями мы встречались при изучении алгебры (определение степени числа) и геометрии (определение синуса угла) в VIII классе?

3.2. Обобщенная теорема Пифагора и скалярное умножение. Выражение скалярного произведения векторов через их координаты. Напомним, что обобщенная теорема Пифагора (или теорема косинусов) выражает квадрат длины одной из сторон треугольника ABC, например, стороны $c = AB$, через две другие его стороны $a = BC$ и $b = AC$ и угол φ между ними (рис. 48):

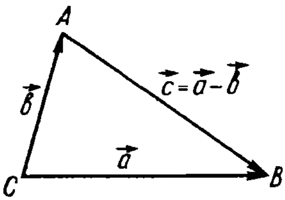


Рис. 48

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi. \qquad (5)$$

Ясно, что выражение $ab\cos\varphi$ является скалярным произведением векторов $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$. Величины же a^2, b^2, c^2 — это скалярные квадраты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$. Итак, равенство (5) можно записать, используя скалярное умножение, так:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \qquad (6)$$

Что напоминает вам это равенство?

Из равенства (6) можно выразить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\,[\,\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]. \qquad (7)$$

В формуле (7) скалярное произведение выражено через квадраты длин векторов.

Введем теперь систему декартовых координат x, y. Пусть $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y)$. Тогда

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x;\ a_y - b_y).$$

Поскольку скалярный квадрат вектора равен сумме квадратов его координат (см. формулу (4)), то

$$\vec{a}^{\,2} = a_x^2 + a_y^2; \quad \vec{b}^2 = b_x^2 + b_y^2;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2. \qquad (8)$$

Подставив выражение (8) в (7), получим, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y. \qquad (9)$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.*

Теперь условие взаимной перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать так:

$$a_x b_x + a_y b_y = 0. \tag{10}$$

3.3. Свойства скалярного умножения. Равенство (6) наводит на мысль, что в векторной алгебре свойства скалярного умножения аналогичны свойствам умножения в обычной алгебре. Это действительно так, и скалярное умножение обладает следующими тремя основными свойствами:

Свойство 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Свойство 2. $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Свойство 3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Эти свойства выполняются для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого действительного числа α и легко выводятся из формулы (10). Проверим, например, свойство 3.

Положим $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ и $\vec{c} = (x_3;\ y_3)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2).$$

Поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)\, x_3 + (y_1 + y_2)\, y_3 = x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

Но и

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3.$$

Следовательно,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Если рассматривать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как силы, действующие на тело, а вектор $\vec{c}$ как перемещение, то свойство 3 можно понимать так: работа, совершаемая результирующей силой $\vec{a} + \vec{b}$ при перемещении $\vec{c}$, равна сумме работ, совершаемых силами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при том же перемещении $\vec{c}$.

Доказанные свойства вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы и разности векторов по правилам, аналогичным правилам обычной алгебры, например,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=$$
$$=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}^2. \qquad (11)$$

3.4. Применение скалярного умножения. Операция скалярного умножения векторов позволяет находить длины и углы (точнее, их косинусы). Действительно, из равенства (3) следует, что

$$|AB|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}, \qquad (12)$$

а из формулы (2) получаем такую формулу для угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}. \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) позволяют находить, например, элементы треугольника, если заданы координаты его вершин, т. е. «решать треугольники». Использование скалярного умножения упрощает доказательства некоторых теорем. Например, теоремы: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 49). Возведя в скалярный квадрат равенства $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$, где $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, получим

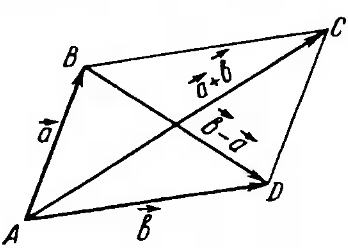


Рис. 49

$$\overrightarrow{AC}^2=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

и

$$\overrightarrow{BD}^2=\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^{\,2}.$$

Сложим полученные равенства и придем к нужному результату:

$$AC^2 + BD^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

О различных применениях векторной алгебры, в том числе и о других применениях скалярного умножения, мы расскажем в следующем параграфе.

Комментарий

Заметим, что при решении задачи о параллелограмме был применен стандартный метод, которым пользуются, решая задачи с помощью векторов на плоскости. Этот метод состоит в следующем.

На плоскости выбирают два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в нашем случае $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{AD}$) и выражают через них все векторы, перечисленные в условии задачи ($\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$). Далее, выполнив необходимые действия над этими векторами (в нашем случае — возведение в скалярный квадрат), доказывают требуемое утверждение.

Аналогично решаются пространственные задачи. Отличие лишь в том, что все необходимые векторы выражаются через три вектора, не параллельные одной плоскости.

3.5. Скалярное умножение векторов в пространстве. Все, что мы говорили о скалярном умножении векторов на плоскости, его свойствах и доказательстве этих свойств, справедливо и для векторов в пространстве. Отличие состоит лишь в том, что у векторов в пространстве не две координаты, а три. Поэтому выражение скалярного произведения векторов, аналогичное равенству (9), имеет вид

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \,. \qquad (14)$$

Теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма для параллелепипеда (любого, а не только прямоугольного!) обобщается так: *сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его ребер*. Докажите эту теорему самостоятельно, предварительно повторив доказательства свойств скалярного умножения векторов в пространстве.

§ 4. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД

4.1. Как появились векторы. Знакомя вас с векторами в VIII классе, мы говорили, что слово «вектор» в переводе с латинского означает «переносчик». Термин «вектор» ввел ирландский математик Уильям Гамильтон (1805—1865), а первый учебник векторного исчисления написал в 1901 г. американский математик и физик Джозайя Гиббс (1839—1903). Таким образом, понятие вектора появилось более чем на 2000 лет позднее, чем «Начала» Евклида, и на 200 с лишним лет позднее координат, введенных Рене Декартом (1596—1650) в середине XVII в.

Векторы оказались удобным математическим аппаратом как для физики, прежде всего для механики (об этом вы уже знаете из курса физики), так и для геометрии, особенно для геометрии пространств высокой размерности. Удобство векторного исчисления заключается в том, что аналогичным геометрическим задачам в пространствах разной размерности векторный аппарат позволяет давать единообразные решения.

Напомним, в чем состоит векторный метод в геометрии, повторим теоремы, которые мы доказали этим методом в VIII классе и расскажем о других его применениях.

4.2. Суть векторного метода в геометрии. Решая задачи и доказывая теоремы векторным методом, мы обычно проходим три этапа:

во-первых, записываем условие задачи или теоремы на языке векторной алгебры;

во-вторых, средствами векторной алгебры преобразуем исходное условие к такому виду, который предполагает решение задачи или доказательство теоремы в векторной форме;

в-третьих, полученное векторное соотношение истолковываем в исходных терминах.

Этим методом мы доказали в «Геометрии-8» теорему о средних линиях треугольника и трапеции (рис. 50, 51)

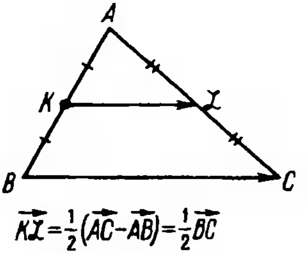


Рис. 50

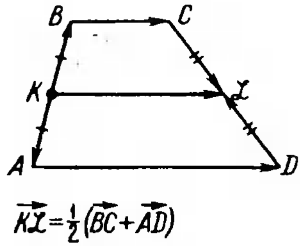


Рис. 51

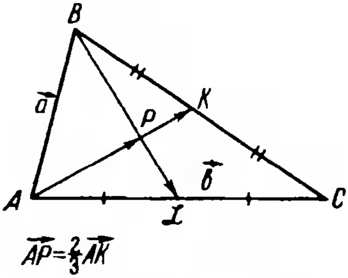


Рис. 52

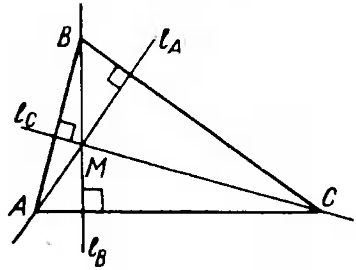


Рис. 53

и теорему о точке пересечения медиан треугольника (рис. 52). Теперь, зная скалярное произведение, мы можем доказать с помощью векторов и теорему о точке пересечения высот треугольника. Напомним ее.

ТЕОРЕМА. **Все высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке** (рис. 53).

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC и l_A, l_B, l_C — прямые, содержащие его высоты и проходящие через вершины A, B, C соответственно. Обозначим через M точку пересечения прямых l_A и l_B. Требуется доказать, что l_C проходит через M.

Поскольку $MA \perp BC$ и $MB \perp AC$, то

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad (1)$$

и

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) в векторном виде выражают условие теоремы. А доказать мы должны, что $MC \perp AB$, т. е.

равенство

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \qquad (3)$$

Выведем из формул (1) и (2) равенство (3). Так как $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, то, подставляя это выражение для $\overrightarrow{BC}$ в формулу (1), получаем, что

$$(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 0,$$

т. е.

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA}. \qquad (4)$$

Аналогично, подставляя в формулу (2) равенство $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$, получаем

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA}. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) вытекает, что

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}, \qquad (6)$$

тогда

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0,$$

поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, т. е. имеет место равенство (3).

Итак, $MC \perp AB$. Теорема доказана.

Для более удобного применения векторного метода введено понятие радиус-вектора.

4.3. Радиус-вектор. Следя в подзорную трубу за движущимся предметом или лучом радара за летящим самолетом, мы как бы проводим до него направленный отрезок от глаза или радара (рис. 54, *а*). От места наблюдения O до предмета M как бы протягивается направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$. Он «следит» за перемещением предмета M: движется предмет и соответственно изменяется вектор $\overrightarrow{OM}$, поэтому любому положению предмета M будет соответствовать направленный к нему вектор $\overrightarrow{OM}$. На языке геометрии это можно выразить так.

Выберем некоторую точку O. Каждой точке M теперь соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 54, *б*). Он называется радиус-вектором точки M, идущим из точки O.

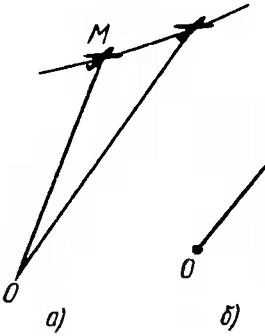


Рис. 54

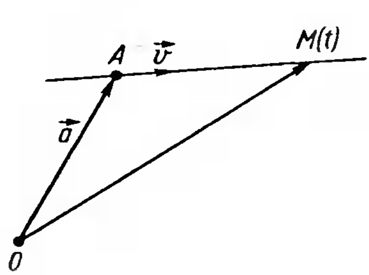


Рис. 55

Имеет место и обратное соответствие: если задан какой-либо вектор $\vec{v}$, то, отложив его от точки O, получим точку A — конец вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$. Вектор $\vec{v}$, отложенный от точки O, является радиус-вектором точки A.

Итак, при выбранной точке O каждой точке M соответствует ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, и наоборот, при выбранной точке O каждому вектору $\vec{v}$, соответствует такая точка A, что $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

Радиус-вектор обычно обозначают через $\vec{r}$.

Если движущийся предмет в момент времени t находится в точке $M(t)$, то его радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(t)$ зависит от t и траектория движущейся точки $M(t)$ задается уравнением $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Такими уравнениями задают движение точки в механике, физике, астрономии. Выведем, например, векторное уравнение равномерного прямолинейного движения.

Пусть точка $M(t)$ движется из точки A, где она была в момент времени $t = 0$, с постоянной скоростью $\vec{v}$ (рис. 55). Тогда ее положение $M(t)$ в момент времени t можно задать радиус-вектором

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA} + \vec{v}t.$$

Полагая $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, получим уравнение равномерного прямолинейного движения

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}t. \qquad (7)$$

Напишите самостоятельно уравнение равномерно ускоренного прямолинейного движения.

Комментарий

В примере с траекторией движущегося предмета мы фактически ввели новые функции — векторные функции, или, как их еще называют, вектор-функции. Действительно, мы установили соответствие между множеством чисел t (означающих промежуток времени) и множеством векторов, исходящих из начала координат в точки пространства, где находится движущийся предмет в рассматриваемый момент времени.

4.4. Уравнение прямой и отрезка. Середина отрезка. По существу, мы уже вывели уравнение прямой — это уравнение (7). Ведь когда число t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, переменная точка $M(t)$ пробегает всю прямую l, идущую через точку A в направлении вектора $\vec{v}$ (см. рис. 55). Вектор $\vec{v}$ называют **направляющим вектором** прямой l. Переменную t обычно называют **параметром**, а само уравнение (7) — **параметрическим уравнением прямой в векторной форме.** Напомним, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A.

Говоря, что уравнение (7) — параметрическое уравнение прямой, мы имеем в виду, что выполняются следующие два утверждения:

1) для каждого значения t точка $M(t)$ — конец радиус-вектора $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{a} + \vec{v}t$ — принадлежит прямой l;

2) и наоборот, для любой точки M_0 прямой l найдется такое значение параметра t_0, что радиус-вектор $\vec{r}(t_0) = \vec{a} + \vec{v}t_0$, отложенный от точки O, имеет точку M_0 своим концом.

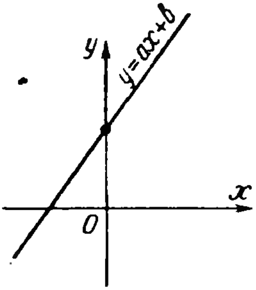


Рис. 56

С алгебраической точки зрения правая часть равенства (7) представляет собой векторную линейную функцию скалярного аргумента t: $\vec{r}(t) = \vec{v}t + a$.

Вспомните, что графиком линейной скалярной функции $y = ax + b$ является прямая (рис. 56), а с помощью векторной линейной функции задается прямая как на плоскости, так и в пространстве.

Если в уравнении (7) параметр t изменяется от t_1 до t_2, то точка $M(t)$ пробегает отрезок с концами в точках $M(t_1)$ и $M(t_2)$. Но чаще векторное уравнение отрезка пишут, выражая радиус-вектор переменной точки $M(t)$ отрезка AB через радиус-векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ его концов. Ясно, что для любой точки $M(t)$ отрезка AB выполняется равенство

$$\overrightarrow{AM}(t) = t\,\overrightarrow{AB}, \qquad (8)$$

причем параметр t изменяется от 0 до 1, когда точка $M(t)$ движется от A до B по отрезку AB (см. рис. 56). Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AM}(t) = \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OA}$, то, подставляя эти выражения для $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}(t)$ в равенство (8), получаем

$$\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OA} = t\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}). \qquad (9)$$

Выражая $\overrightarrow{OM}(t)$ из уравнения (9), приходим к следующему векторному уравнению отрезка:

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1 - t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}. \qquad (10)$$

Напомним, что параметр t изменяется от 0 до 1, когда точка $M(t)$ двигается по отрезку AB от A до B. Значение параметра t, как следует из равенства (8), равно отношению длин отрезков $AM(t)$ и AB: $t = \frac{AM(t)}{AB}$. Поэтому, если точка P — середина отрезка AB, то для нее $t = \frac{1}{2}$, так как $AP^{AP} = \frac{1}{2}AB$. Из уравнения (10) получаем выражение для радиус-вектора середины отрезка AB:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (11)$$

Итак, *радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиус-векторов его концов.*

4.5. Центры масс отрезка, треугольника, тетраэдра. Как мы уже говорили, векторы удобны для решения задач по механике. Рассмотрим, как применяется векторный метод в задачах, связанных с центрами масс. В физике под центром масс тела понимают точку приложения силы тяжести, действующей на тело. Если тело поместить в пространство так, чтобы точка опоры совпадала с центром масс, то это тело будет находиться в состоянии равновесия. В этом пункте речь пойдет о центрах масс простейших фигур — отрезков, треугольников, тетраэдров. Вы, наверное, заметили, что такая последовательность соответствует повышению размерности фигуры от единицы до трех.

Центр масс отрезка — это, естественно, его середина. Если точка P — середина отрезка AB, то его радиус-вектор находится по формуле (11).

Как вы знаете, центром масс треугольника ABC мы называем точку P пересечения медиан этого треугольника (см. рис. 53). Выразим ее радиус-вектор через радиус-векторы вершин треугольника ABC.

Введем обозначения: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда медианы $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ и $\overrightarrow{BL} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$. Поскольку точка P лежит на отрезке BL, то

$$\overrightarrow{AP} = (1 - \lambda)\,\vec{a} + \lambda\frac{\vec{b}}{2}. \qquad (12)$$

С другой стороны, $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AK}$, т. е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\mu}{2}(\vec{a} + \vec{b}). \qquad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что

$$(1 - \lambda)\,\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b} = \frac{\mu}{2}\vec{a} + \frac{\mu}{2}\vec{b},$$

а потому

$$\left(1 - \lambda - \frac{\mu}{2}\right)\vec{a} = \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\vec{b}. \qquad (14)$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то равенство (14) выполняется лишь в том случае, когда

$$1 - \lambda - \frac{\mu}{2} = 0 \text{ и } \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0,$$

т. е. лишь в том случае, когда

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}. \qquad (15)$$

Итак,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}. \qquad (16)$$

Равенство (16) дает нам еще одно (векторное!) доказательство теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка разбивает каждую медиану на отрезки, относящиеся как 2 : 1 (считая от вершины).

Перейдем теперь к радиус-векторам. Так как $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, то, подставляя эти выражения в равенство $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$, получаем, что

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (17)$$

Сравнивая равенства (11) и (17) для радиус-векторов центров масс отрезка и треугольника, естественно предположить, что для тетраэдра $ABCD$ аналогичное равенство должно выглядеть так:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \qquad (18)$$

Но где же находится центр масс тетраэдра? Оказывается, что он является точкой пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центрами масс противоположных граней. Это мы сейчас докажем.

ТЕОРЕМА. **Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами масс противоположных граней, пересекаются в одной точке и разбиваются ею на отрезки, относящиеся как 3 :1 (считая от вершин).**

Эту точку называют **центром масс тетраэдра.**

Доказательство. Пусть в тетраэдре $ABCD$ точка K — середина ребра CD, точка M — центр масс грани BCD, точка N — центр масс грани ACD (рис. 57). Отрезки AM и BN лежат в плоскости ABK и пересекаются в точке P. Так как точка M лежит на отрезке BK и $BM = \frac{2}{3}BK$, то

$$\overrightarrow{AM} = (1 - \tfrac{2}{3})\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}, \qquad (19)$$

а поскольку $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AM}$, то

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{\mu}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\mu\overrightarrow{AK}. \qquad (20)$$

С другой стороны, поскольку точка P лежит на отрезке BN, то

$$\overrightarrow{AP} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AN}. \qquad (21)$$

Но $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ и, подставляя это выражение в последнее равенство, получаем еще одно выражение для $\overrightarrow{AP}$:

$$\overrightarrow{AP} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AK}. \qquad (22)$$

Приравнивая правые части уравнений (20) и (22), получим

$$(1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AK} = \tfrac{\mu}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\mu\overrightarrow{AK}, \qquad (23)$$

откуда следует, что

$$(1 - \lambda - \tfrac{\mu}{3})\overrightarrow{AB} = \tfrac{2}{3}(\mu - \lambda)\overrightarrow{AK}. \qquad (24)$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AK}$ неколлинеарны, то равенство (24) выполняется лишь в том случае, когда коэффициенты при $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AK}$ равны нулю, т. е. когда

$$1 - \lambda - \tfrac{\mu}{3} = 0 \text{ и } \mu - \lambda = 0. \qquad (25)$$

Из системы (25) следует, что

$$\lambda = \mu = \tfrac{3}{4}. \qquad (26)$$

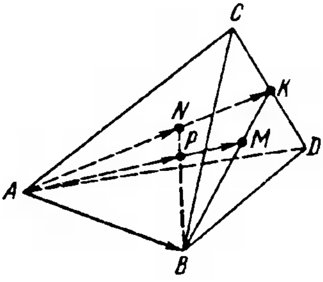


Рис. 57

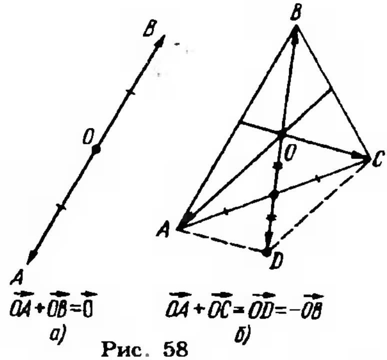


Рис. 58

Равенства (26) означают, что точка P делит отрезки AM и BN в отношении 3:1 (считая от вершин A и B).

Если мы теперь рассмотрим пересечение отрезка AM с отрезком CQ, соединяющим вершину C с центром масс Q грани ABD, то снова получим, что точка их пересечения делит отрезок AM в отношении 3:1. А потому этой точкой является точка P. Это верно и для четвертого отрезка, идущего из точки D в центр масс грани ABC. Теорема доказана.

Найдем теперь выражение для радиус-вектора $\vec{OP}$ центра масс P тетраэдра $ABCD$, т. е. выведем равенство (18). Для центра масс треугольника BCD (точки M) согласно равенству (17) имеем

$$\vec{OM} = \tfrac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}). \qquad (27)$$

Так как

$$\vec{AP} = \tfrac{3}{4}\vec{AM} \qquad (28)$$

и $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$, а $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$, то

$$\vec{OP} - \vec{OA} = \tfrac{1}{4}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) - \tfrac{3}{4}\vec{OA}. \qquad (29)$$

Выражая $\vec{OP}$ из формулы (29), получаем равенство (18).

4.6. Центр масс системы материальных точек. Центры масс отрезка, треугольника и тетраэдра обладают одним интересным свойством: если из них провести радиус-векторы к концам отрезков, вершинам треугольника и тетраэдра, то сумма этих векторов во всех трех случаях будет равна нуль-вектору (рис. 58). Для отрезка это очевидно (рис. 58, *а*); для треугольника несложно доказывается чисто геометрически (рис. 58, *б*); для тетраэдра вытекает из равенства (18), если выбрать начальной точкой O центр масс — точку P: $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ и из формулы (18) следует, что

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}. \tag{30}$$

В формулировке данного свойства, кроме центра масс, участвуют две точки — концы отрезка, три точки — вершины треугольника, четыре точки — вершины тетраэдра. Это наблюдение позволяет ввести понятие центра масс сначала для конечной системы точек, а затем и для конечной системы материальных точек.

Сначала рассмотрим просто систему S, состоящую из n точек A_1, ..., A_n. **Центром масс** или **центроидом** этой системы назовем такую точку P, что сумма радиус-векторов, идущих из точки P в точки A_1, ..., A_n равна нуль-вектору, т. е.

$$\overrightarrow{PA_1} + \ldots + \overrightarrow{PA_n} = \vec{0}. \tag{31}$$

Возникает вопрос: а есть ли такая точка P для любой системы S? Оказывается, что есть, и найти ее можно как конец P радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$, вычисленного по формуле

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}). \tag{32}$$

И безразлично, какую точку O мы выберем за начальную: положение точки P от выбора точки O не зависит. Проверим это.

Возьмем другую точку O_1 и определим по формуле (32) положение центра масс P_1 системы S. Получим

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{O_1A_1} + \ldots + \overrightarrow{O_1A_n}) = \frac{1}{n}(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_n}) =$$

$$= \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}) = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P}. \tag{33}$$

Из равенства $\overrightarrow{O_1P_1} = \overrightarrow{O_1P}$ следует, что $P_1 = P$, т. е. положение центроида не зависит от выбора точки O.

Ясно, что если начало O выбрать в центре масс P, то в левой стороне равенства (32) будет стоять нуль-вектор, так как $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$, и потому в этом случае из формулы (32) следует равенство (31). Итак, доказано существование центроида для любой конечной системы точек.

Обратимся теперь к общему случаю, когда в точках $A_1, \ldots, A_n$ находятся массы $m_1, \ldots, m_n$ соответственно. Попробуем угадать, где находится центр масс этой системы материальных точек. Если точек всего две (A_1, m_1) и (A_2, m_2), то известное правило рычагов Архимеда подсказывает, что точка P должна лежать на отрезке A_1A_2 и делить его в отношении, обратном отношению масс m_1 и m_2, чтобы выполнялось равенство: $m_1A_1P = m_2A_2P$.

В векторной форме это равенство означает, что

$$m_1\overrightarrow{PA_1} + m_2\overrightarrow{PA_2} = \vec{0}. \tag{34}$$

Равенство (34) подсказывает нам, что центр масс системы материальных точек $(A_1, m_1) \ldots (A_n, m_n)$ естественно определить как такую точку P, что выполняется равенство

$$m_1\overrightarrow{PA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{PA_n} = \vec{0}. \tag{35}$$

Рассмотренный ранее случай центроида системы точек удовлетворяет уравнению (35) при условии, что все массы единичные: $m_1 = \ldots = m_n = 1$.

Центр масс системы материальных точек $(A_1, m_1), \ldots, \ldots, (A_n, m_n)$ находится как конец P радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$, определяемого формулой

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + \ldots + m_n}. \tag{36}$$

Положение точки P не зависит от выбора точки O. Докажите это самостоятельно, рассуждая так же, как при выведении равенства (33).

Одним из важнейших свойств центра масс является следующее свойство. *Пусть точка P — центр масс системы S_1 материальных точек* $(A_1, m_1), \ldots, (A_n, m_n)$,

P_2 — центр масс системы S_2 материальных точек (B_1, m_1), ..., (B_k, m_k). Тогда центр масс P суммарной системы материальных точек (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n), (B_1, m_1'), ..., (B_k, m_k') является также центром масс системы из двух материальных точек $(P_1, m_1 + ... + m_n)$ и $(P_2, m_1' + ... + m_k')$.

Проиллюстрируйте это свойство с помощью рассмотренных нами примеров и попробуйте доказать его самостоятельно.

Комментарий

Доказывая, что положение центра масс не зависит от выбора начальной точки O, мы, как и при определении синуса угла (см. «Геометрию-8», п. 13.3), доказали *корректность определения*, т. е. независимость его ни от каких дополнительных построений.

§ 5. МЕТОД КООРДИНАТ

5.1. Общее понятие о координатах. Изучая векторы, мы вспомнили о координатах на прямой и на плоскости, а также ввели координаты в пространстве. Основная идея координат состоит в том, чтобы задавать геометрические объекты алгебраическими соотношениями — уравнениями и неравенствами. Простейшую фигуру, точку, задают на прямой одним числом, на плоскости — парой чисел, в пространстве — тройкой чисел. Точно так же и вектор на фиксированной прямой можно задать одним числом, на плоскости — парой чисел, в пространстве — тройкой чисел. Но сопоставление точек и векторов с их координатами возможно лишь после того, как фиксируется некоторая система координат, т. е. выбирается начало координат и координатные оси (для точек) или набор базисных векторов (для векторов).

Понятие системы координат используется не только в математике. Вам хорошо знакомы географические координаты — широта и долгота. Измерение температуры градусником (по Цельсию, по Фаренгейту, по Кельвину и т. п.), времени часами и календарями — вот самое распространенное использование систем координат. И каждый почтовый адрес — это тоже координаты.

Координаты в геометрию ввели в середине XVII в. французские математики Рене Декарт и Пьер Ферма́ (1601—1665). Ими был создан новый раздел геометрии — **аналитическая геометрия**, в котором геометрические задачи решались алгебраическими методами. Поэтому прямоугольные системы координат называют также **декартовыми**.

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие задачи аналитической геометрии и познакомимся с методом координат. Одна из сторон этого метода — истолкование геометрически алгебраических и аналитических соотношений — вам хорошо известна благодаря графическому изображению функций. Большее внимание мы уделим другой стороне этого метода — применению алгебры в решении задач по геометрии.

5.2. Суть метода координат. Как и при использовании векторного метода (см. п. 4.2), решая задачи методом координат, мы проходим три этапа:

во-первых, записываем условие задачи в координатном виде;

во-вторых, используя методы алгебры, преобразуем исходное условие в такой вид, который предполагает алгебраическое решение задачи;

в-третьих, полученное алгебраическое решение истолковываем в исходных геометрических терминах.

Проиллюстрируем эту схему двумя задачами, решение которых чисто геометрическими средствами совсем не просто, тогда как методом координат они решаются легко.

Задача 1. *Найти множество точек на плоскости, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек, есть величина постоянная.*

Решение. Пусть заданы точки A и B и некоторое число a. Требуется определить множество точек M таких, что

$$AM^2 - BM^2 = a. \quad (1)$$

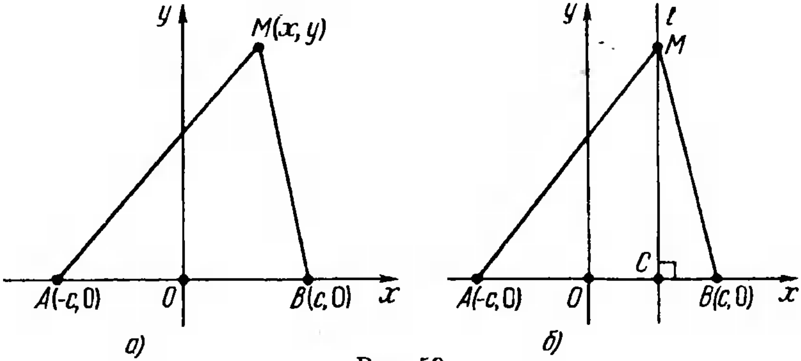


Рис. 59

Первый этап. Введем систему координат так, чтобы осью x была прямая AB, а началом координат — середина отрезка AB — точка O (рис. 59, *а*). Обозначим через $2c$ длину отрезка AB и будем считать, что ось x направлена от A к B. Тогда точка A имеет координаты $(-c, 0)$, а точка B — $(c, 0)$.

Используя формулу (13) из п. 2.4, запишем уравнение (1) через координаты в виде

$$(x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 - y^2 = a. \quad (2)$$

Второй этап. Выполняя алгебраические действия, приводим уравнение (2) к виду

$$x = \frac{a}{2c}. \quad (3)$$

Третий этап. Уравнению (3) удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат на прямой l, перпендикулярной оси x и пересекающей ее в точке C с координатами $\left(\frac{a}{2c}, 0\right)$. Искомым множеством точек и является эта прямая l (рис. 59, *б*).

Задача 2. *Найти множество точек на плоскости, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная.*

Решение. Пусть заданы точки A и B и некоторое число a^2. Требуется описать множество точек M таких, что

$$AM^2 + BM^2 = a^2. \quad (4)$$

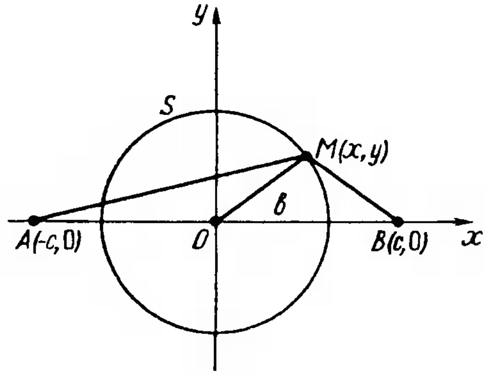


Рис. 60

Первый этап полностью совпадает с первым этапом решения задачи 1, но уравнение (4) приводится к виду

$$(x + c)^2 + y^2 + (x - c)^2 + y^2 = a^2. \qquad (5)$$

Второй этап. Выполняя алгебраические действия, приводим уравнение (5) к виду

$$a^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} - c^2. \qquad (6)$$

Третий этап. Возможны три случая:

1) $\frac{a^2}{2} - c^2 < 0$. Тогда точек, удовлетворяющих уравнению (6), нет.

2) $\frac{a^2}{2} - c^2 = 0$. В этом случае лишь координаты точки O (0, 0) удовлетворяют уравнению (2), и искомым множеством является эта точка O.

3) $\frac{a^2}{2} - c^2 = b^2 > 0$. Тогда квадрат расстояния от точки M (x, y) до начала координат, точки O, есть величина постоянная и равна b^2, а потому искомым множеством точек является окружность S радиуса b с центром в точке O (рис. 60).

При решении этих задач у нас уже появились уравнения прямых и окружностей — основных фигур евкли-

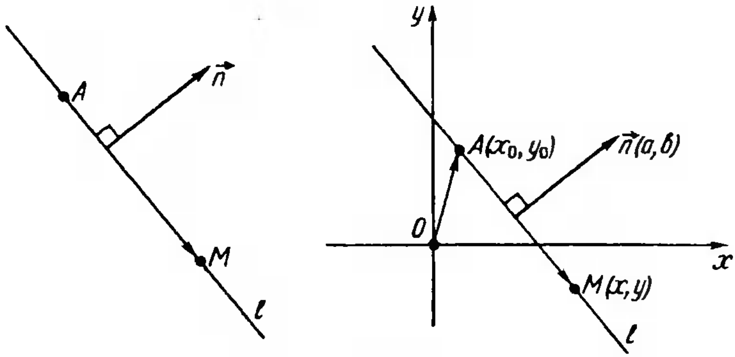


Рис. 61

довой планиметрии. Найдем уравнения этих фигур в общем случае.

5.3. Уравнение прямой и линейные уравнения. Мы уже описывали в п. 4.4 векторное уравнение прямой, задавая положение прямой некоторой ее точкой и направляющим вектором (см. рис. 55). На плоскости положение прямой l можно задать также какой-либо ее точкой A и любым ненулевым вектором $\vec{n}$, перпендикулярным прямой l (рис. 61, *а*). Этот вектор $\vec{n}$ называется **нормалью** прямой l.

Для точки A и вектора нормали $\vec{n}$ существует единственная прямая l, проходящая через точку A и перпендикулярная вектору $\vec{n}$. Это и означает, что положение прямой l на плоскости может быть задано некоторой ее точкой и вектором нормали.

Далее, точка M является точкой прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, а это, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Итак, точка M является точкой прямой l тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \qquad (7)$$

Равенство (7) и является уравнением прямой на плоскости, но пока оно записано в векторной форме. Чтобы записать его в координатах, надо ввести на плоскости некоторую систему прямоугольных координат x, y (рис. 61, *б*). Положим, что в этой системе координат точка A имеет координаты (x_0, y_0), точка M — координаты (x, y), вектор $\vec{n}$ — координаты (a, b). Тогда вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$ и равенство (7) можно записать в виде

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (8)$$

Раскрывая скобки и полагая

$$c = -(ax_0 + by_0),$$

приходим к такому уравнению:

$$ax + by + c = 0. \qquad (9)$$

Уравнения вида (9) называются **линейными уравнениями**. Таким образом, мы доказали, что *прямая на плоскости в декартовых координатах задается линейным уравнением.*

Верно и обратное утверждение: *любое линейное уравнение вида (9) при условии, что пара (a, b) ненулевая, задает на плоскости в декартовых координатах прямую.*

Докажем это утверждение. Так как пара (a, b) ненулевая, то считаем, что $b \neq 0$. Тогда пара $(0, -\frac{c}{b})$ удовлетворяет уравнению (9). Построим прямую l, проходящую через точку $(0, -\frac{c}{b})$ и перпендикулярную ненулевому вектору $\vec{n} = (a, b)$. Построенная прямая l задается уравнением (9). Чтобы убедиться в этом, достаточно провести все рассуждения, которые мы провели при выводе уравнения (9), — тем самым высказанное утверждение доказано.

Итогом изложенного в этом пункте материала является следующая теорема, которую часто называют основной теоремой о задании прямой.

ТЕОРЕМА. **Каждая прямая на плоскости в декартовых координатах задается линейным уравнением. И наоборот: любое линейное уравнение на плоскости задает прямую.**

Эта теорема, с одной стороны, дает исчерпывающее описание аналитического задания прямой на плоскости, а с другой стороны, дает геометрическую интерпретацию любых линейных уравнений с двумя переменными.

Комментарий

С помощью координат можно любую геометрическую задачу свести к алгебраической, заменив геометрические фигуры и понятия соответствующими алгебраическими понятиями. Это станет возможным, если вывести уравнения различных фигур. И одной из важнейших теорем в связи с этим является теорема о задании прямой на плоскости, в которой доказано, что не только всякая прямая на плоскости задается линейным уравнением, но и наоборот, для любого линейного уравнения с двумя переменными на координатной плоскости найдется такая прямая, которая задается этим уравнением.

Можно задать аналитически полуплоскость, отрезок, треугольник, окружность и другие фигуры, а затем соотнести геометрические понятия с алгебраическими:

точка на плоскости — пара чисел;

прямая на плоскости — линейное уравнение;

окружность — квадратное уравнение вида (21) (см. п. 5.5);

точка, принадлежащая фигуре, — координаты точки удовлетворяют уравнению фигуры... и т. д.

После этого, переведя геометрическую задачу на алгебраический язык, решают соответствующую алгебраическую задачу. Так мы и будем поступать в следующих пунктах этого параграфа, а также и в других параграфах этого учебника в тех случаях, когда это облегчит решение задачи.

5.4. Взаимное расположение двух прямых. Опираясь на рассуждения п. 5.3, решим аналитически несколько задач, связанных с взаимным расположением

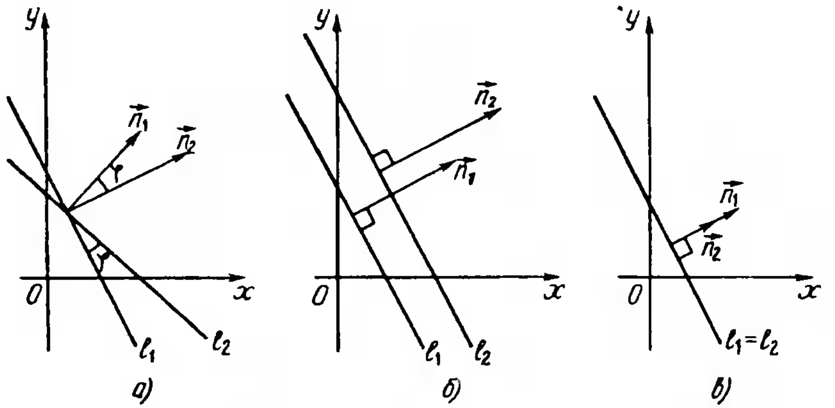


Рис. 62

двух прямых на плоскости. Эти прямые l_1 и l_2 зададим соответственно уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \tag{10}$$

и

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0. \tag{11}$$

Возможен один из трех следующих случаев.

1) Прямые l_1 и l_2 пересекаются (рис. 62, *а*). Это имеет место тогда и только тогда, когда векторы их нормалей $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ неколлинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда их координаты непропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Точку пересечения прямых l_1 и l_2 в этом случае находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Один из вертикальных углов, образованных пересекающимися прямыми l_1 и l_2, равен углу φ между нормалями к этим прямым — векторами $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \tag{13}$$

или, выражая равенство (13) через координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$,

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \tag{14}$$

2) Прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 62, *б*). В этом случае векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны и их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \tag{15}$$

Так как прямые l_1 и l_2 общих точек не имеют, то к равенству (15) следует добавить неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \tag{16}$$

поскольку при выполнении условий (15) и (16) система уравнений (12) решений не имеет, что и соответствует случаю параллельности прямых l_1 и l_2.

3) Прямые l_1 и l_2 совпадают (рис. 62, *в*). В этом случае

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \tag{17}$$

т. е. уравнения в системе (12) отличаются лишь некоторым числовым множителем $k = \frac{a_1}{a_2}$, и система (12) имеет бесконечное множество решений.

Разберите самостоятельно случаи обращения в ноль некоторых каэффициентов уравнения (9) Чему соответствуют эти случаи?

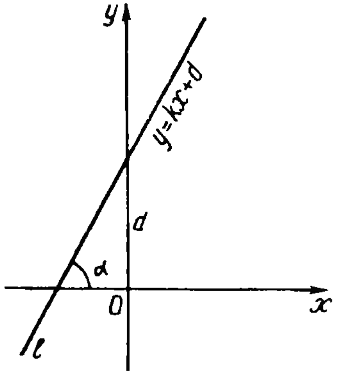


Рис. 63

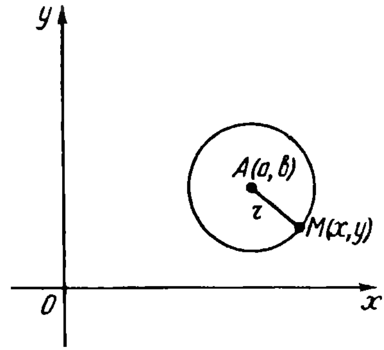


Рис. 64

Если уравнение (9) $b \neq 0$, то его можно привести к виду

$$y = kx + d, \tag{18}$$

где $k = -\frac{a}{b}$ и $d = -\frac{c}{b}$.

Вам хорошо известно из курса алгебры, что графиком линейной функции (18) является прямая. Но это утверждение в алгебре не доказывалось. Теперь же его доказательство появилось в курсе геометрии. Вспомните, что коэффициент k (он называется **угловым коэффициентом**) равен тангенсу угла наклона a прямой l к положительному направлению оси x (рис. 63).

Получите самостоятельно условие перпендикулярности двух прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями (5) и (6), а также запишите условие перпендикулярности l_1 и l_2 через их угловые коэффициенты.

5.5. Уравнение окружности. Напомним, что окружность — это множество точек на плоскости, удаленных от данной точки (центра окружности) на данное расстояние (радиус окружности). Поэтому, если окружность F имеет центром точку A и радиус r, то точка M является точкой окружности F тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$|AM| = r. \tag{19}$$

Равенство (19) уже можно рассматривать как уравнение окружности F. Запишем его в координатах. Введем систему прямоугольных координат x, y с началом в точке O. Пусть в этой системе точка A имеет координаты (a, b), а точка M — координаты (x, y) (рис. 64). Тогда, используя формулу (13) п. 2.4 для расстояния между точками, запишем равенство (19) в координатах следующим образом:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \qquad (20)$$

Возведем обе части равенства (20) в квадрат:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (21)$$

Уравнение (21) равносильно уравнению (20), поскольку $r > 0$. Поэтому уравнение (21), как и (20) и (19), является уравнением окружности. Именно уравнение вида (21) имеют в виду, когда говорят об уравнении окружности с центром в точке (a, b) и радиусом r.

Если центром окружности F является начало координат — точка O, то $a = 0$, $b = 0$, и уравнение (21) упростится и приобретет вид

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (22)$$

Зная уравнения прямых и окружностей, мы можем задачи об этих фигурах решать аналитически, сводя их к решению системы алгебраических уравнений.

Рассмотрите самостоятельно простейшую из таких задач о взаимном расположении прямой и окружности. При этом простота решения зависит от выбора удобных систем координат.

Используя уравнение (21), получим теперь аналитическое соотношение, задающее круг D, ограниченный окружностью F, т. е. круг радиуса r с центром в точке A. Поскольку точка M с координатами x, y принадлежит кругу D тогда и только тогда, когда расстояние $|AM| \leq r$, то круг D будет задан неравенством

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2. \qquad (23)$$

В случае, когда центром круга D является начало координат, неравенство (23) упрощается и принимает вид

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2. \qquad (24)$$

5.6. Вопросы, вопросы, вопросы... про уравнения фигур. Выведя в пп. 5.3—5.5 уравнения прямой и окружности, мы пока еще не уяснили суть фразы: некоторая фигура задана некоторым уравнением или неравенством. Обсудим этот вопрос.

Вы, наверное, обратили внимание, что, когда мы выводили уравнения, задающие прямую или окружность, а также неравенство, задающее круг, мы каждый раз сначала говорили о некотором характерном геометрическом свойстве, которым обладают точки данной фигуры, а затем выражали это свойство аналитически через координаты точек фигуры.

Формулируя характерное свойство, мы утверждали, что точка M принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда... и далее называли конкретную формулировку. Для координат точки M эта фраза означала, что точка M принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют некоторому аналитическому соотношению — уравнению, неравенству или даже системе уравнений и неравенств. Это аналитическое соотношение — уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств — задает фигуру F.

В обороте «тогда и только тогда...» всегда заключается два взаимно обратных утверждения. Сформулируем их для фигуры, заданной некоторым уравнением

$$f(x, y) = 0 \qquad (25)$$

(для неравенства $f(x, y) > 0$ или системы уравнений и неравенств соответствующие формулировки дайте самостоятельно).

Говорят, что уравнение $f(x, y) = 0$ задает фигуру F, если, во-первых, координаты каждой точки фигуры F удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$ и, во-вторых, каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, принадлежит фигуре F.

Утверждение, что точка M с координатами (x, y) принадлежит фигуре F, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению, можно расчленить на две части. *Во-первых, координаты каждой точки фигуры F удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$ и, во-вторых, каждая точка, координаты которой не удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, не принадлежит фигуре F.*

Это второе толкование оборота «тогда и только тогда...» равносильно первому. Подумайте, почему.

Выводя уравнения различных фигур, необходимо проверять оба утверждения, связанные оборотом «тогда и только тогда...». Иначе возможны ошибки. Приведем пример.

Пусть F — окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Через F_1 обозначим полуокружность окружности F, лежащую выше оси x, а через F_2 фигуру, состоящую из окружности F и ее диаметра на оси x (рис. 65). Координаты каждой точки полуокружности F_1 удовлетворяют уравнению (22), но точка с координатами $(0, -r)$ не принадлежит фигуре F_1, т. е. уравнение (22) не задает фигуру F_1.

Для фигуры F_2, наоборот, не выполняется первое утверждение — укажите какую-нибудь точку фигуры F_2, координаты которой не удовлетворяют уравнению (22), — но зато справедливо утверждение, что любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (22), принадлежит F_2. И снова фигуру F_2 не задает уравнение (22).

При выводе уравнений фигур не проверять оба указанных утверждения возможно лишь в том случае, когда на каждом этапе вывода рассуждения подкрепляются словами «тогда и только тогда...». Именно так мы выводили уравнения прямой и окружности. Попробуйте самостоятельно расчленить эти выводы на две части, каждая из которых подтверждает справедливость одного

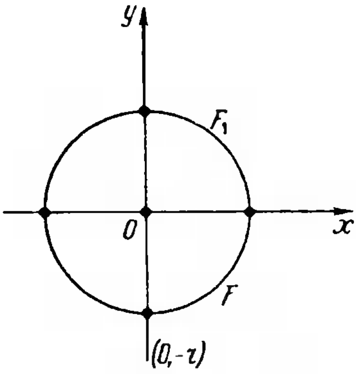


Рис. 65

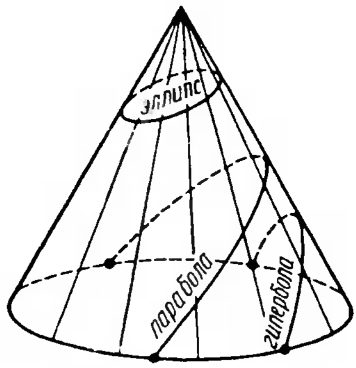


Рис. 66

из двух утверждений, связанных с оборотом «тогда и только тогда...».

5.7. Окружность Аполлония. Аполлония Пергского (ок. 260 — ок. 170 до н. э.) часто называют последним великим геометром Древней Греции. Он был родом из города Перги, но учился и работал там же, где работал Евклид, — в Александрии. Его имя нам встретится еще не раз, прежде всего в связи с так называемыми коническими сечениями, т. е. с плоскими сечениями конуса (рис. 66). Здесь же мы рассмотрим задачу о множестве точек на плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная. В результате решения этой задачи и появится окружность, названная именем Аполлония. Конечно, решал эту задачу сам Аполлоний чисто геометрическими методами, хотя в них можно увидеть зарождение координатного метода (отметим, что термины абсцисса и ордината ввел Аполлоний). Мы же для ее решения применим координатный метод и продемонстрируем его преимущества.

Итак, пусть на плоскости заданы некоторые две точки A и B, и положительное число k. Спрашивается, какой фигурой является множество точек M таких, что

$$\frac{|MA|}{|MB|} = k. \qquad (26)$$

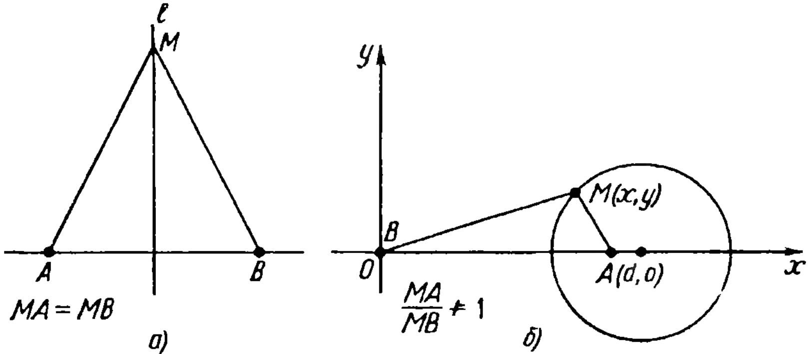


Рис. 67

Если $k = 1$, то точки M равноудалены от точек A и B. Как вам известно, множеством таких точек является серединный перпендикуляр отрезка AB (рис. 67, *а*). Для $k = 1$ задача решена. Считаем далее, что $k \neq 1$. Применим координатный метод.

Введем систему прямоугольных координат x, y так, чтобы точка B стала началом координат, осью x стала прямая AB, а точка A лежала бы на положительной полуоси x. Пусть A имеет координаты $(d, 0)$ (рис. 67, *б*). Так как все величины в равенстве (26) положительны, оно равносильно равенству

$$|MA|^2 = k^2|MB|^2. \qquad (27)$$

Используя формулу расстояния между точками, запишем равенство (27) в координатах:

$$(x - d)^2 + y^2 = k^2(x^2 + y^2). \qquad (28)$$

Преобразуя уравнение (28), получаем

$$x^2 + y^2 - 2\frac{xd}{1 - k^2} + \frac{d^2}{1 - k^2} = 0.$$

Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(x - \frac{d}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2k^2}{\left(1 - k^2\right)^2}. \qquad (29)$$

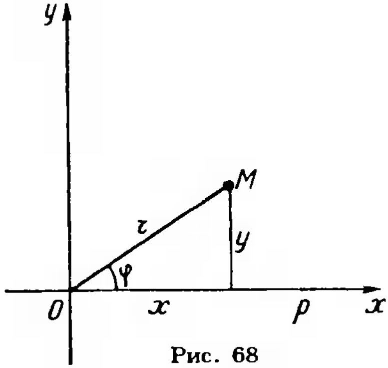


Рис. 68

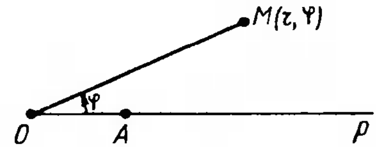


Рис. 69

Уравнение (29) имеет вид уравнения (21), а потому (29) задает окружность с центром в точке $\left(\frac{d}{1-k^2}, 0\right)$ и радиусом $r = \frac{dk}{|1-k^2|}$. Эту окружность и называют окружностью Аполлония.

Попробуйте решить задачу об окружности Аполлония чисто геометрическими методами, и вы увидите, что координатный метод для ее решения значительно удобнее.

5.8. Полярные координаты. Кроме прямоугольных декартовых координат, часто употребляют и другие координатные системы. Так, изучая векторы, мы рассказывали в п. 2.6 о косоугольной системе координат, их называют также аффинными координатами (см. рис. 39). Здесь мы расскажем о **полярных координатах** на плоскости. Они вводятся так.

Зададим некоторую точку O и луч p с началом в точке O (рис. 68). Выберем некоторую единицу измерения длин и пусть отрезок OA на луче p имеет длину, равную единице. Будем отсчитывать углы φ от луча OA как обычно, против часавой стрелки. Каждой точке M, отличной от точки O, сопоставим длину $r = OM$ и угол $\varphi = \angle MOA$. Пара чисел (r, φ) называется **полярными координатами точки** M. Точка O соответствует $r = 0$, а полярный угол φ для точки O не определяется. Точка O называется **полюсом** полярной системы координат.

Многие линии задаются в полярных координатах проще, чем в декартовых. Например, окружность с центром в точке O и радиусом d задается уравнением $r = d$.

Часто необходимо перейти от декартовых координат к полярным или наоборот. Если начало декартовых координат совпадает с полюсом полярной системы, а ось x направлена по полярной оси, то ясно, что декартовы координаты x, y и полярные координаты r, φ одной и той же точки M связаны равенствами (рис. 69):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{30}$$

Из равенств (30) следует, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{31}$$

5.9. Метод координат в пространстве. Если на плоскости положение точки характеризуется парой чисел относительно выбранной системы координат, то в пространстве, чтобы задать положение точки, необходимы уже три координаты. Система прямоугольных декартовых координат x, y, z задается выбором начала координат — точки O — и трех попарно перпендикулярных координатных осей O_x, O_y и O_z, проходящих через точку O (см. рис. 41). Как находятся координаты любой точки M в пространстве относительно выбранной системы координат, мы уже рассказывали в п. 2.7.

Если любое линейное уравнение (9) на координатной плоскости задает прямую, то любое линейное уравнение

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{32}$$

в пространстве задает плоскость (при условии, что среди чисел a, b, c есть отличные от нуля). Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы о задании прямой (см. п. 5.3). Надо лишь заметить, что положение плоскости в пространстве однозначно опреде-

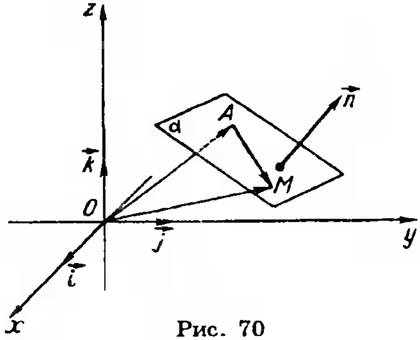


Рис. 70

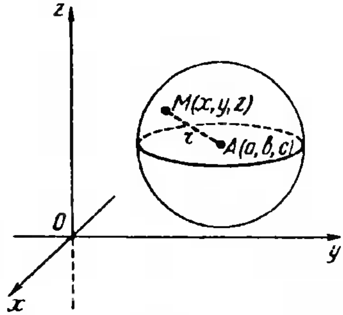


Рис. 71

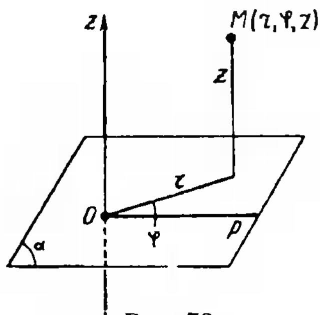


Рис. 72

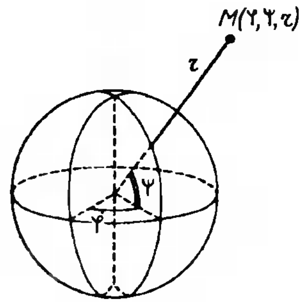


Рис. 73

лится какой-либо точкой A (x_0, y_0, z_0) этой плоскости и вектором $\vec{n}$ (a, b, c), перпендикулярным этой плоскости. Все остальные рассуждения для плоскости ведутся так же, как и для прямой (рис. 70).

Зная, какими уравнениями задаются в пространстве плоскости, можно найти условия взаимного расположения двух плоскостей в пространстве, формулу для угла между плоскостями и т. п.

Такая же аналогия прослеживается и при выводе уравнения сферы с центром в точке A (a, b, c) и радиусом r. Это уравнение в общем случае имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2, \qquad (33)$$

а если центр сферы лежит в начале координат, то уравнение (33) упрощается (рис. 71):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (34)$$

Кроме прямоугольных декартовых координат, в пространстве применяются и другие координатные системы: косоугольные (аффинные) координаты (см. рис. 46), цилиндрические (рис. 72), сферические (рис. 73). Рассмотрите рисунки и подумайте, какими величинами определяется положение точки в пространстве относительно каждой из этих координатных систем.

ИТОГИ ГЛАВЫ 1

В главе 1 мы продолжили начатое еще в «Геометрии-8» знакомство с векторной алгеброй. Во введении и в § 1 мы повторили *линейные операции с векторами* (сложение векторов и умножение вектора на число).

Введя в § 2 понятие *координаты векторов*, мы свели векторную алгебру к обычной арифметике, заменив чисто геометрические линейные операции с векторами арифметическими действиями с их координатами.

Материал § 3 познакомил нас еще с одной операцией векторной алгебры — *скалярным умножением векторов*. Эта операция позволяет решать с помощью векторов метрические задачи: находить длины отрезков и вычислять величины углов.

Наконец, два последних параграфа главы 1 (§ 4 и 5) посвящены *векторному* и *координатному методам*. Применяются эти методы в геометрии по одной и той же схеме (см. п.п. 4.2 и 5.2): сначала геометрическое условие задачи переводится на язык векторной или обыкновенной алгебры, затем задача решается средствами соответствующей алгебры и, наконец, полученное решение истолковывается геометрически. Знакомясь с этими методами, важно овладеть не только техникой алгебраического аппарата, но, что еще важнее, *процессом пере-*

вода формулировок задач с одного языка на другой.

Вам уже знаком перевод на язык математики условий физических и так называемых «текстовых» задач, имеющих обычно вполне реальное содержание. В подобных случаях говорят о *математизации* задач различных разделов науки, техники или реальной жизни.

Свести решение задачи к такому разделу математики, в котором преобладает *алгоритмическая сторона* — значит справиться с самой большой трудностью, после преодоления которой получить результат не так уж сложно. Посредством координатного и векторного методов алгебра помогает геометрии, алгоритмическая сторона в которой слабее, чем в алгебре.

Глава 2

Фигуры вращения и их величины

ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы расскажем, как измерить длины, площади, объемы фигур вращения: окружности, круга, сферы, шара, цилиндра и конуса. Выводы соответствующих формул (рис. 74) приведены в последнем параграфе этой главы (§ 10). Но чтобы решить эти трудные вопросы, относящиеся по-существу, скорее, к высшей математике, чем к элементарной, нам вначале предстоит изучить вопросы о взаимном расположении круга и многоугольника, шара и многогранника и т. д. (§ 6—8). Например, площадь круга определяют так же, как ее определяли геометры Древней Греции: «исчерпывая» этот круг вписанными в него многоугольниками, неограниченно увеличивая число их сторон (рис. 75). Удобнее всего при этом рассматривать вписанные в круг правильные многоугольники (рис. 76).

Правильные многоугольники обладают рядом важных свойств, поэтому мы изучаем их в § 9.

Так что на пути к решению основной задачи этой главы, мы познакомимся с многими красивыми теоремами геометрии. Эта глава важна еще и тем, что ею мы фак-

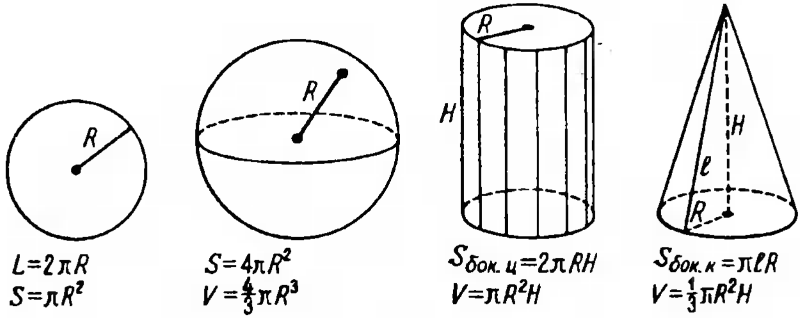


Рис. 74

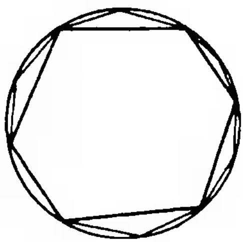


Рис. 75

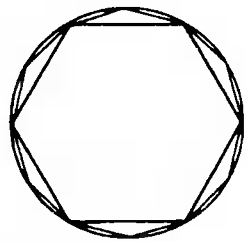


Рис. 76

тически завершаем изучение классической элементарной планиметрии — той ее главной части, которая была изложена еще в «Началах» Евклида.

§ 6. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ И ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

6.1. Взаимное расположение окружности и прямой. Наглядно ясно, что для взаимного расположения окружности и прямой возможен один из трех случаев:

1) прямая p и окружность F не имеют общих точек, **не пересекаются** (рис. 77, *а*);

2) прямая p и окружность F имеют единственную общую точку B. В этом случае говорят, что прямая p и окружность F **касаются** в точке B (рис. 77, *б*), а прямая p называется **касательной** к окружности F;

3) прямая p и окружность F имеют две общие точки (рис. 77, *в*). О таких прямой и окружности говорят, что они **пересекаются**.

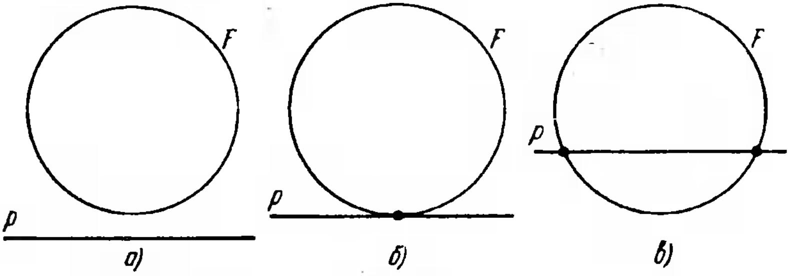


Рис. 77

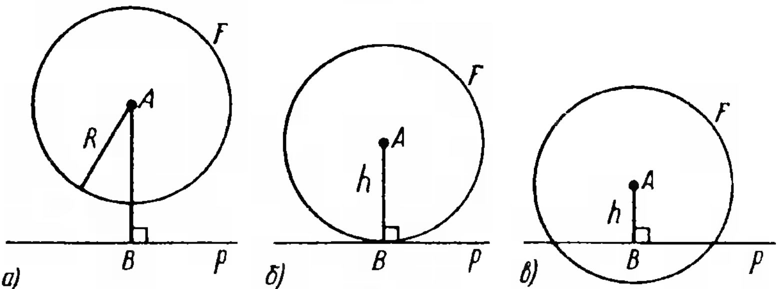


Рис. 78

Какой из этих трех случаев имеет место, зависит от расстояния h от центра A окружности F до прямой p, т. е. от длины перпендикуляра AB, опущенного из центра A на прямую p. Если h больше радиуса R окружности F, то прямая p не пересекает окружности F, так как все точки прямой p удалены от точки A больше, чем на R (рис. 78, *а*).

Если h равно радиусу R, то прямая p касается окружности F в точке B (рис. 78, *б*). Действительно, расстояние между центром A и точкой B равно R, а все остальные точки прямой p удалены от A дальше, чем на R.

Наконец, если h меньше R, то прямая p пересекает окружность F в двух точках C и D (рис. 78, *в*). Точки C и D на прямой p удалены от точки B на расстояние

$d = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Выделим особый случай касания прямой и окружности, доказав два взаимно обратных утверждения.

Признак касания прямой и окружности. **Прямая, проходящая через точку окружности и пер-**

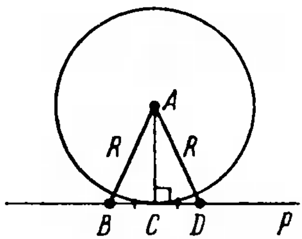


Рис. 79

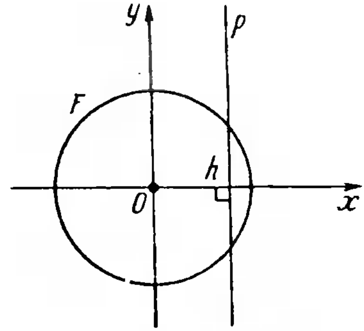


Рис. 80

пендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, касается окружности.

Свойство касательной. *Если прямая, касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Доказательство признака касания. Пусть прямая p проходит через точку B окружности F и перпендикулярна ее радиусу AB (см. рис. 78, *б*). Тогда все точки прямой p, отличные от точки B, удалены то центра A дальше, чем на R, а потому не лежат на окружности F. Следовательно, точка B — единственная общая точка прямой p и окружности F, т. е. p и F касаются.

Доказательство свойства касательной. Пусть прямая p касается окружности F в точке B, т. е. B их единственная общая точка. Докажем, что прямая p перпендикулярна радиусу AB. Допустим, что это не так. Тогда проведем перпендикуляр AC к прямой p и отложим на p отрезок $CD = BC$ (рис. 79). Прямоугольные треугольники ACB и ACD равны (по двум катетам), поэтому $AB = AD$. Значит, точка D лежит на окружности F. Следовательно, p и F имеют две общие точки B и D, что противоречит условию. Итак, $p \perp AB$.

Комментарий

Способ, которым мы доказали свойство касательной, состоял в следующем. Сначала мы допустили, что заключение доказываемого утверждения неверно: предположили, что касательная не перпендикулярна радиусу. Затем такое предположение привело нас к противоречию с истинным утверждением (в данном случае — с условием теоремы, а могло бы возникнуть и другое противоречие). К этому противоречию мы пришли в результате допущения, что заключение доказываемого утверждения неверно. Следовательно, на самом деле оно верно. Такой способ доказательства называется **способом «от противного».** Он был известен еще в Древней Греции.

Из всех возможных случаев взаимного расположения прямой и окружности мы детально рассмотрели только случай касания. Используя метод координат, несложно решить этот вопрос в общем виде. Если выбрать начало координат в центре рассматриваемой окружности F, а ось x направить перпендикулярно к прямой p (рис. 80), исследование вопроса о взаимном расположении прямой p и окружности сведется к выяснению, сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = h \end{cases}.$$

Каждое решение этой системы является координатами точки пересечения прямой и окружности, а число решений равно числу корней квадратного уравнения $y^2 = R^2 - h^2$ и соответствует тем трем случаям, о которых мы рассказали в п. 6.1: $h > R$ — нет решений, $h = R$ — одно решение, $h < R$ — два решения.

6.2. Взаимное расположение окружности и угла. Градусная мера дуги окружности. Различные случаи взаимного расположения угла и окружности изображены на рис. 81—85. Попробуйте охарактеризовать каждый из этих случаев. Мы подробно рассмотрим два из них, изображенные на рис. 81 и 82.

На рис. 81 изображен угол, вершина которого лежит в центре O окружности F. Такой угол называется **центральным углом.** На рис. 82 изображен угол, вершина которого лежит на окружности, а обе стороны пересекают окружность. Про такой угол говорят, что он **вписан в окружность.** Говорят также, что вписанный угол **опирается на дугу окружности**, лежащую между его сторонами.

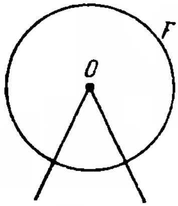


Рис. 81

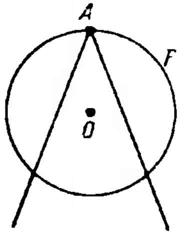


Рис. 82

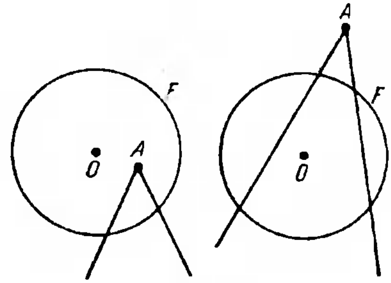


Рис. 83

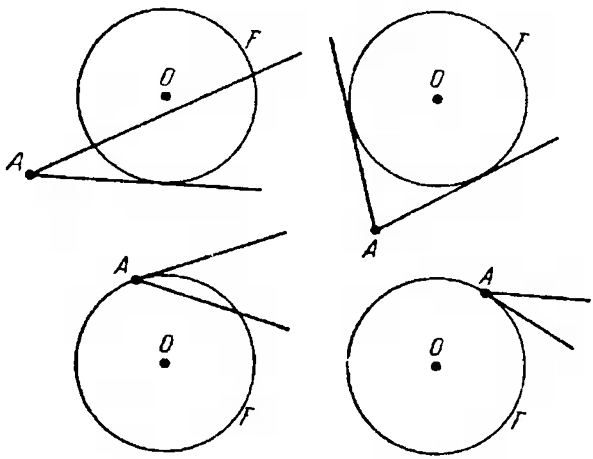


Рис. 84

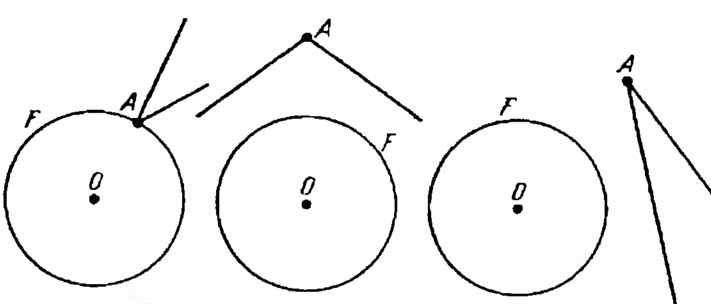


Рис. 85

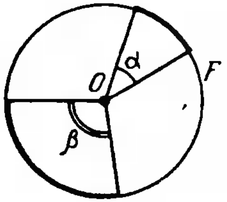


Рис. 86

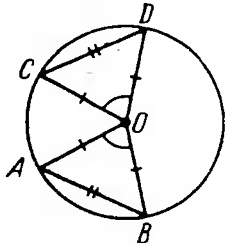


Рис. 87

Между дугами данной окружности и ее центральными углами устанавливается так называемое *взаимно однозначное соответствие*: каждому центральному углу соответствует та дуга, которую этот угол «высекает» из окружности (рис. 86), и наоборот. Это соответствие позволяет ввести градусную меру дуги окружности. С градусным измерением дуг вы знакомы: например, из географии вы знаете о градусном измерении дуг меридианов и параллелей на Земле — широте и долготе. И на глобусе вы, конечно, найдете точку с координатами 60° северной широты и 40° восточной долготы. А ведь это градусные меры центральных углов, соответствующих дугам меридиана и параллели. Так поступают и в геометрии, вводя градусную меру дуги окружности.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера центрального угла, который соответствует этой дуге. Четверть окружности имеет градусную меру 90°, полуокружность — 180°, вся окружность — 360°. Если дуга AB имеет градусную меру $\alpha°$, то пишут $\smile AB = \alpha°$.

Две дуги одной окружности называют **равными**, если их градусные меры равны.

О хорде, соединяющей концы дуг, говорят, что она **стягивает** эту дугу, а также центральный угол, соответствующий этой дуге.

Для углов и дуг не больших 180° имеет место следующее утверждение: *хорды данной окружности равны тогда и только тогда, когда они стягивают равные центральные углы (равные дуги).*

Это утверждение непосредственно следует из признаков равенства треугольников (рис. 87). Его можно сформулировать и так: *равные хорды (равные дуги) видны из центра окружности под равными углами.*

6.3. Измерение вписанных углов. Для каждого из углов, стороны которого пересекают или касаются некоторой окружности, можно сформулировать и доказать теорему, выражающую меру этого угла через меры соответствующих ему дуг окружности. Мы докажем лишь теорему об измерении вписанного угла. Поищите самостоятельно формулировки аналогичных теорем для остальных случаев, изображенных на рис. 83—84, и докажите их. Если вам удастся это сделать, то вас можно поздравить с самостоятельным геометрическим исследованием. Если же у вас возникнут трудности, то посмотрите на рис. 91 в конце этого пункта. Он поможет вам в вашем исследовании. А сейчас обратимся к теореме о вписанном угле.

ТЕОРЕМА. **Мера угла, вписанного в окружность, равна половине дуги, на которую он опирается.**

Более кратко говорят так: *вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Доказательство. Пусть угол ABC вписан в окружность, BA и BC — хорды окружности. Возможны три случая.

1) Центр окружности — точка O лежит на одной из сторон угла ABC, например на стороне BC (рис. 88, *а*). Проведем радиус OA и рассмотрим треугольник OAB. Он равнобедренный, так как $OA = OB$. Поэтому в нем $\angle A = \angle B$. А так как $\angle AOC$ внешний для треугольника OAB, то $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$.

Следовательно, $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Но центральный угол AOC измеряется дугой AC. Значит, его половина — угол B измеряется половиной дуги AC. Для первого случая теорема доказана.

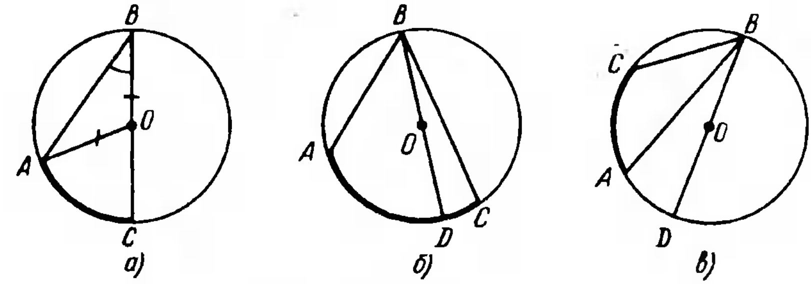


Рис. 88

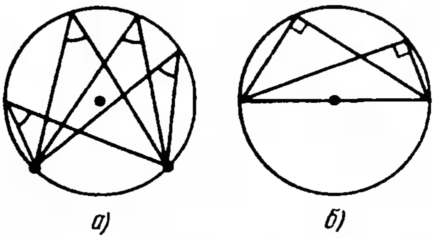


Рис. 89

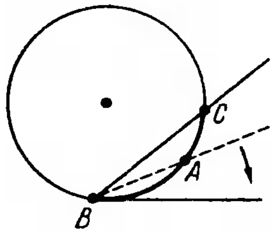


Рис. 90

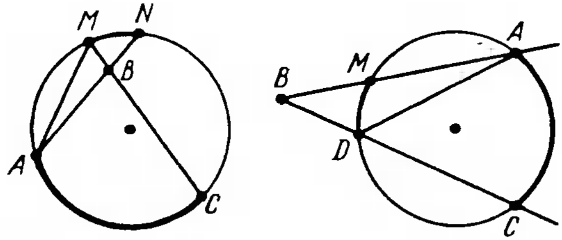
2) Центр O лежит внутри угла ABC (рис. 88, *б*). Тогда проведем диаметр BD и разобьем угол ABC на два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$. Как уже доказано, угол ABD измеряется половиной дуги AD, а угол DBC — половиной дуги DC. Поэтому угол ABC — сумма углов ABD и DBC измеряется полусуммой дуг AD и DC, т. е. половиной дуги AC, что и требовалось доказать.

3) Центр O лежит вне угла ABC (рис. 88, *в*). Снова проводим диаметр BD и рассматриваем угол ABC как разность получившихся вписанных углов. Проведите доказательство для этого случая самостоятельно.

Следствие 1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны* (рис. 89, *а*).

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (т. е. на диаметр), прямой* (рис. 89, *б*).

А теперь представьте, что одна из сторон вписанного угла ABC (например, сторона AB) поворачивается вокруг вершины B до положения касательной к окружности в точке B (рис. 90). При этом A перемещается по окруж-



$\angle ABC = \angle AMC + \angle MAN$ $\quad$ $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAM$

а) $\quad$ б)

Рис. 91

ности к точке B. И в результате из теоремы о вписанном угле мы получим «в пределе» теорему об угле между хордой и касательной: *угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой.*

Таким способом можно получить и другие теоремы об углах, стороны которых касаются окружности. Завершим же мы этот пункт рис. 91, на котором приведены идеи доказательства теорем об измерении углов, стороны которых пересекают окружность.

6.4. Взаимное расположение двух окружностей. Рассмотрим рис. 92, на котором изображены все случаи расположения двух окружностей. Мы видим, что, как и в случае прямой и окружности, две окружности могут либо не иметь общих точек, либо иметь единственную общую точку (такие окружности называются **касающимися**), либо пересекаться в двух точках.

Какой именно из случаев взаимного расположения двух окружностей имеет место, зависит от соотношений между радиусами R и r окружностей F и G (будем считать, что $R \geqslant r$) и расстоянием d между их центрами O и P.

Ясно, что если $d > R + r$, то окружности F и G не имеют общих точек и лежат вне друг друга (см. рис. 92, *а*).

Если $d = R + r$, то F и G касаются друг друга внешним образом в некоторой единственной общей точке A, которая лежит на линии центров — отрезке OP (см. рис. 92, *б*).

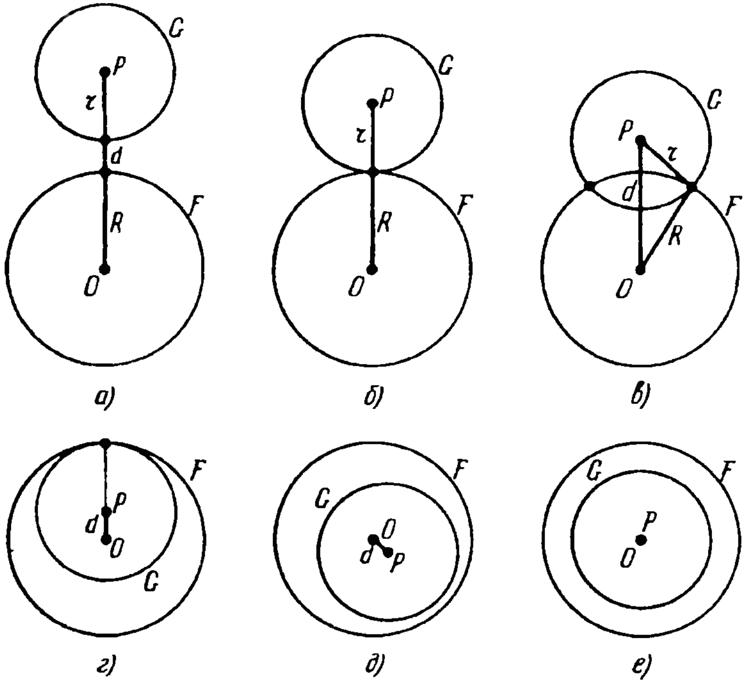


Рис. 92

Если $d < R + r$, но $d > R - r$, то окружности F и G пересекаются в двух точках, симметричных относительно линии центров (рис. 92, *в*).

Если $d = R - r$ (когда $R > r$), то окружности касаются внутренним образом в некоторой точке B, лежащей на прямой OP (рис. 92, *г*).

Наконец, если $d < R - r$, то F и G не имеют общих точек и G лежит внутри F (рис. 92, *д*).

Особо выделим случай, когда $d = 0$, т. е. центры окружностей F и G совпадают (рис. 92, *е*). Такие окружности называются **концентрическими.**

Чтобы доказать эти утверждения, воспользуемся координатным методом.

Введем систему прямоугольных координат с началом в центре окружности F, осью x которой является линия центров OP, направленная по вектору $\overrightarrow{OP}$ (рис. 93). Тог-

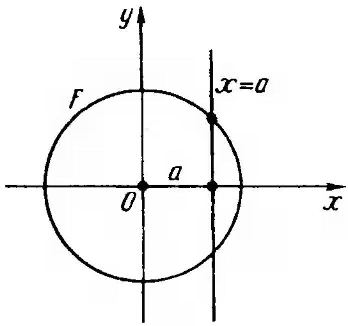


Рис. 93

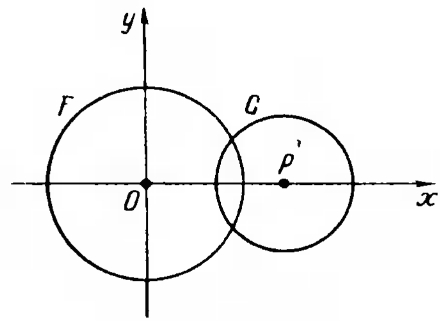


Рис. 94

да окружность F будет задана уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, а окружность G — уравнением

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2,$$

где d — абсцисса точки P. Следовательно, координаты общих точек окружностей F и G являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Сохраняя неизменным первое из уравнений системы (1) и вычитая из второго уравнения первое, приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 2dx = d^2 + R^2 - r^2 \end{cases}, \qquad (2)$$

равносильной системе (1). Ясно, что (2) имеет столько же решений, сколько решений у квадратного уравнения $y^2 = R^2 - x_0^2$, где

$$x_0 = \frac{d}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2d}.$$

Отметим, что, поскольку $d \geqslant 0$ и $R \geqslant r$, то $x_0 \geqslant 0$. Рассмотрим три возможных случая.

1) Если $R^2 - x_0^2 = 0$, то решение одно. В этом случае $x_0 = R$, так как $R > 0$ и $x_0 \geqslant 0$. Тогда из равенства

$$R = \frac{d}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2d}$$

получаем, что

$$d^2 - 2dR + R^2 = r^2,$$

т. е.

$$(R - d)^2 = r^2. \qquad (3)$$

Равенство (3) имеет место либо, если $R - d = r$, т. е. когда $d = R - r$ (см. рис. 92, *г*), либо при условии $R - d = -r$, т. е. когда $d = R + r$ (см. рис. 92, *б*).

2) Если $R^2 - x_0^2 > 0$, то решений два. Проводя с неравенствами аналогичные преобразования, получаем, что в этом случае

$$R - r < d < R + r, \qquad (4)$$

что соответствует рис. 92, *в*.

3) Наконец, если $R^2 - x_0^2 < 0$, то решений нет. В этом случае получаем, что либо $d < R - r$ (рис. 92, *д*), либо $d > R + r$ (см. рис. 92, *а*).

Итак, аналитические рассуждения привели к тем случаям, которые были подсказаны нам наглядными соображениями (см. рис. 92).

Отметим, что система (2) — это система вида

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = a, \qquad a \geqslant 0 \end{cases}. \qquad (5)$$

Первое уравнение этой системы задает окружность, втóрое — прямую (рис. 94). Так что фактически задачу о взаимном расположении двух окружностей мы свели к задаче о взаимном расположении окружности и прямой, которую уже решили чисто геометрически в п. 6.1.

Можно было бы и задачу о взаимном расположении прямой и окружности свести к исследованию числа ре-

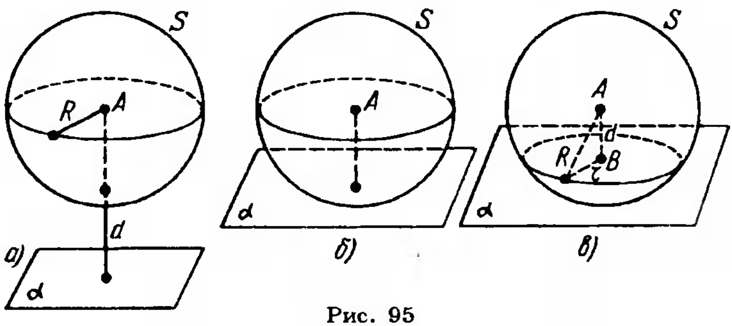


Рис. 95

шений системы (5), но в этом случае координатный метод не имеет преимущества перед чисто геометрическими рассуждениями.

6.5. Взаимное расположение сферы и плоскости. Пространственными аналогами прямой и окружности являются плоскость и сфера. Классификация взаимного расположения плоскости и сферы вполне аналогична классификации взаимного расположения прямой и окружности:

1) Если расстояние d от центра A сферы S до плоскости α больше радиуса R сферы S, то сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 95, *а*).

2) Если расстояние d от центра сферы S до плоскости α равно радиусу R сферы, то плоскость и сфера имеют единственную общую точку (рис. 95, *б*). В этом случае говорят, что сфера и плоскость **касаются**, плоскость α называется **касательной** к сфере S, а их единственная общая точка — **точкой касания.**

Как и для прямой, касательной к окружности, для плоскости, касательной к сфере, справедливы два взаимно обратных утверждения.

Признак касания плоскости и сферы. **Плоскость, проходящая через точку сферы и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, касается сферы.**

Свойство касательной плоскости. *Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Попробуйте доказать эти утверждения, рассуждая аналогично доказательству свойства касания прямой и окружности.

3) Если расстояние d от центра A сферы S до плоскости а меньше радиуса R сферы S, то плоскость а пересекает сферу S по окружности F, радиус которой $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, а центр — основание B перпендикуляра AB, опущенного из центра сферы S на плоскость а (рис. 95, *в*).

В частном случае, если плоскость α проходит через центр сферы S, то $d = 0$ и $r = R$, т. е. плоскость пересекает сферу по большой окружности (рис. 96).

Справедливость такой классификации легко подтверждается применением координатного метода. Введем в пространстве систему декартовых координат x, y, z, считая, что плоскость α — это плоскость x, y, а центр A сферы S лежит на оси z в точке $(0, 0, a)$ не ниже плоскости α, т. е. $a \geqslant 0$. Тогда сфера S задается уравнением

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2, \tag{6}$$

где R — радиус сферы, a — расстояние от центра A сферы S до плоскости α. Плоскость α задается уравнением $z = 0$.

Тогда фигура, получающаяся пересечением сферы S и плоскости α, задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - a^2 \\ z = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Проследим, какие фигуры задает система (8), меняя параметр a от 0 до $+\infty$. Когда $a \in [0, R)$, уравнение

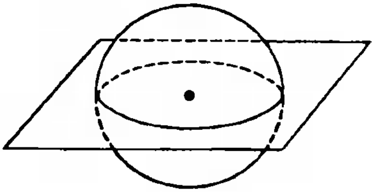


Рис. 96

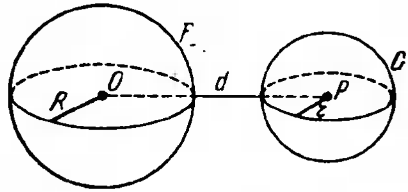


Рис. 97

$x^2 + y^2 = R^2 - a^2$ задает в плоскости x, y окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - a^2}$. По этой окружности плоскость α пересекает сферу S (см. рис. 95, *в*).

Если $a = R$, то уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает в плоскости α точку (0, 0, 0), т. е. сфера S касается плоскости α в точке (0, 0, 0) (см. рис. 95, *б*).

Наконец, если $a > R$, то $R^2 - a^2 < 0$ и на плоскости x, y не существует точек, координаты которых удовлетворяли бы уравнению $x^2 + y^2 = R^2 - a^2$. Значит, плоскость α и сфера S не имеют общих точек (см. рис. 95, *а*).

6.6. Классификация взаимного расположения двух сфер. Рассмотрим две сферы S_1 и S_2 радиусов R_1 и R_2 с центрами в точках O и P (рис. 97). Через d обозначим расстояние между из центрами, т. е. длину отрезка OP. Классификация взаимного расположения S_1 и S_2 вполне аналогична классификации взаимного расположения двух окружностей и зависит от соотношений между R_1, R_2 и d.

Чтобы провести эту классификацию, снова применим координатный метод. Введем систему координат с началом в центре O сферы S_1 так, чтобы ось z проходила через центр P сферы S_2 в направлении вектора $\overrightarrow{OP}$ (рис. 98). Тогда сфера S_1 задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1{}^2,$$

а сфера S_2 — уравнением

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R_2{}^2.$$

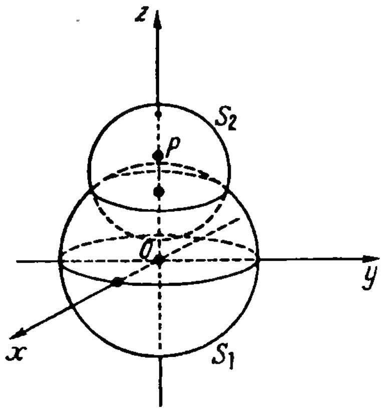


Рис. 98

Будем считать, что $R_1 \geqslant R_2$.

Фигура, получающаяся в пересечении сфер S_1 и S_2, задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R_2^2 \end{cases}.$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ 2zd = d^2 + R_1^2 - R_2^2 \end{cases}. \qquad (9)$$

Второе уравнение системы (9) имеет вид $z = a$ и задает плоскость, перпендикулярную оси z и удаленную от плоскости x, y на расстояние a, где

$$a = \frac{d}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d} \geqslant 0. \qquad (10)$$

Мы свели задачу о пересечении двух сфер к уже рассмотренной нами задаче о взаимном расположении сферы и плоскости. Становится ясно, что две сферы либо пересекаются по окружности (рис. 99, *а*), либо касаются внешним или внутренним образом (рис. 99, *б*, *в*), либо не имеют общих точек (рис. 99, *г*, *д*).

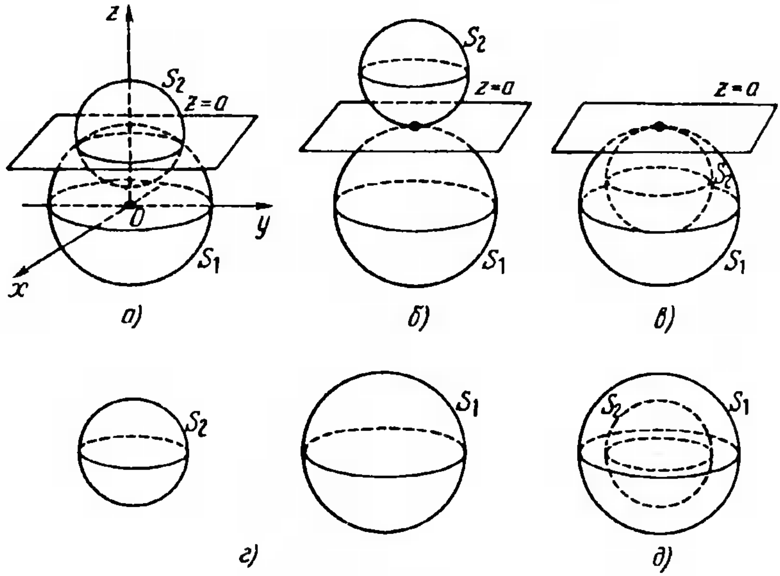


Рис. 99

6.7. Опорные прямые и опорные плоскости. Давая классификацию взаимного расположения прямой и окружности, мы как бы надвигали прямую на окружность, параллельно перемещая ее (см. рис. 77). Сначала окружность и прямая не имели общих точек (см. рис. 77, *а*) и окружность лежала по одну сторону от прямой внутри одной из ограниченных этой прямой полуплоскостей. Затем прямая коснулась окружности в некоторой точке A, но окружность все еще находилась по одну сторону от прямой (см. рис. 77, *б*). В этот момент прямая как бы уперлась в окружность. И наконец прямая пересекла окружность и точки окружности расположились по обе стороны от прямой (см. рис. 77, *в*).

Аналогичную классификацию можно провести для взаимного расположения прямой и любой ограниченной фигуры на плоскости (рис. 100). **Ограниченной фигурой** на плоскости мы будем называть фигуру, лежащую внутри некоторой окружности, а в пространстве — фигуру, лежащую внутри некоторой сферы (рис. 101).

Возможны три случая взаимного расположения прямой и ограниченной фигуры на плоскости:

1) Фигура F и прямая p не имеют общих точек и F лежит внутри одной из полуплоскостей, ограниченных прямой p (см. рис. 100, *а*).

2) Фигура F и прямая p имеют общую граничную точку A, и фигура F лежит по одну сторону от прямой p (см. рис. 100, *б*). В этом случае прямая p называется **опорной к фигуре** F в граничной точке A. **Граничной** же **точкой фигуры** F называется такая точка A, сколь угодно близко к которой есть как точки фигуры F, так и точки, не принадлежащие фигуре F (рис. 102).

3) По обе стороны от прямой p лежат точки фигуры F (см. рис. 100, *в*). Прямая p как бы разбивает фигуру F на две части.

Поговорим подробнее о случае опорных прямых. Мы уже заметили, что касательные прямые окружности являются ее опорными прямыми. Эти прямые будут опорными и для круга, ограниченного данной окружностью (рис. 103).

Прямые, на которых лежат стороны треугольника или трапеции, являются для них опорными (рис. 104, *а*). А через каждую вершину треугольника или трапеции проходит бесконечно много опорных прямых к этим фигурам (рис. 104, *б*).

Но не всегда через опорную точку фигуры можно провести опорную прямую. Например, нет опорных прямых к четырехугольнику $ABCD$ в его вершине D на рис. 105.

О том, как связано наличие опорных прямых в граничных точках фигуры с выпуклостью фигуры и что такое выпуклые фигуры, мы расскажем чуть позднее. А сейчас перейдем к пространственным фигурам.

Аналогом планиметрического понятия опорной прямой в стереометрии является опорная плоскость. Плоскость α, проходящая через граничную точку A пространственной фигуры F, называется **опорной плоскостью** фигуры F в точке A, если фигура F лежит по одну

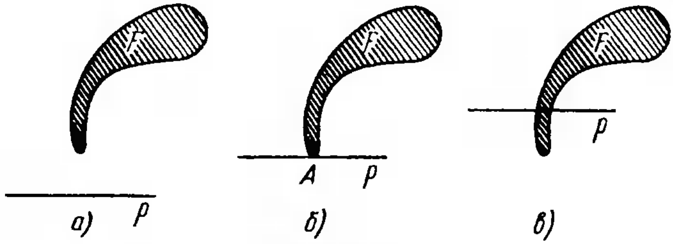


Рис. 100

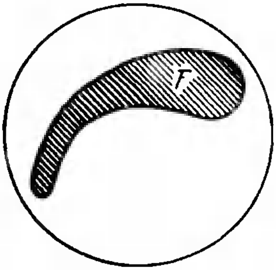


Рис. 101

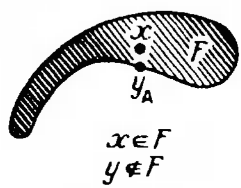


Рис. 102

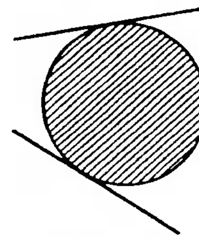


Рис. 103

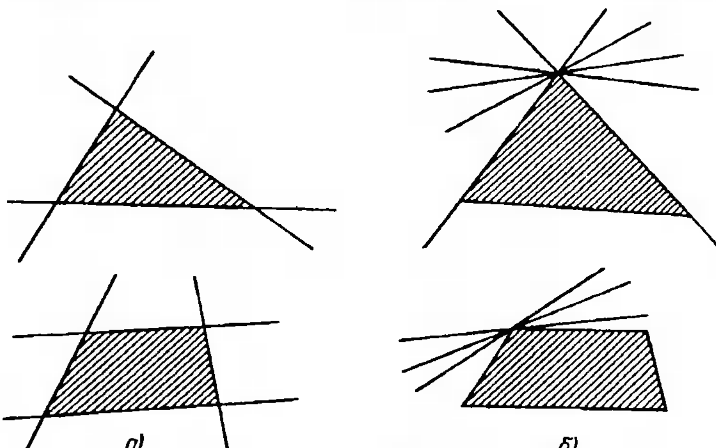


Рис. 104

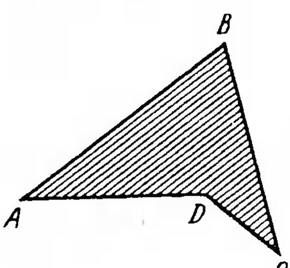


Рис. 105

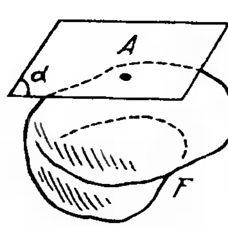


Рис. 106

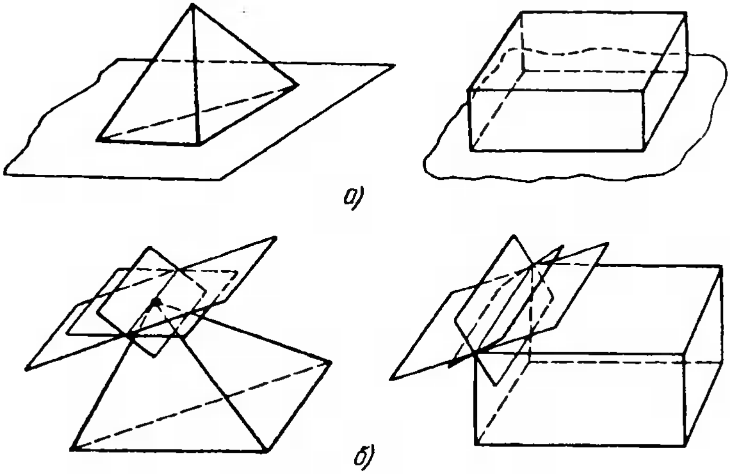


Рис. 107

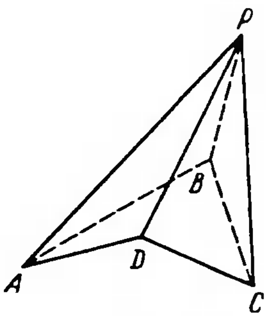


Рис. 108

сторону от плоскости, т. е. в одном из полупространств, ограниченных плоскостью α (рис. 106).

Касательная плоскость сферы, а также ограниченного ею шара, является опорной для них. Точно так же плоскости граней тетраэдра или параллелепипеда являются их опорными плоскостями (рис. 107, *а*).

Через вершины тетраэдра и параллелепипеда, а также через точки их ребер, проходит бесконечное множество опорных к ним плоскостей (рис. 107, *б*). Но, например, через внутренние точки ребра *PD* четырехугольной пирамиды *PABCD* (рис. 108) не проходит ни одна опорная плоскость.

§ 7. ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

7.1. Выпуклые многоугольники и выпуклые фигуры. Напомним, что многоугольник является выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей сторону этого многоугольника (рис. 109).

Любой треугольник является выпуклым многоугольником, но уже не каждый четырехугольник будет выпуклым (см. рис. 106). Если многоугольник выпуклый, то прямые, содержащие стороны многоугольника, как бы вырезают его из плоскости, и выпуклый многоугольник получается как общая часть (пересечение) полуплоскостей, ограниченных этими прямыми (рис. 110).

Характерное свойство выпуклого многоугольника состоит в следующем: *многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда для любых его точек соединяющий их отрезок содержится в этом многоугольнике* (рис. 111).

Именно этим свойством и определяется выпуклость для произвольных фигур (как на плоскости, так и в пространстве). Итак, фигура называется **выпуклой**, если для любых двух ее точек соединяющий их отрезок содержится в этой фигуре (рис. 112). Точку и «пустое множество» (фигуру, не содержащую точек) также считают выпуклыми фигурами. Простейшие выпуклые фигуры — отрезок, луч, треугольник, квадрат, круг (рис. 113). Попробуйте самостоятельно доказать, например, выпуклость круга. Угол может быть как выпуклой фигурой, если он не больше 180°, так и невыпуклой, если он больше 180° (рис. 114).

Выпуклые фигуры на плоскости ограничены **выпуклыми кривыми**. Например, окружность является выпуклой кривой: она ограничивает выпуклую фигуру — круг. Но выпуклой фигурой окружность не является, поскольку для нее не выполняется определение выпуклой фигуры.

Границами выпуклых многоугольников являются замкнутые **выпуклые ломаные**.

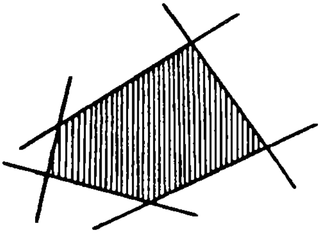


Рис. 109

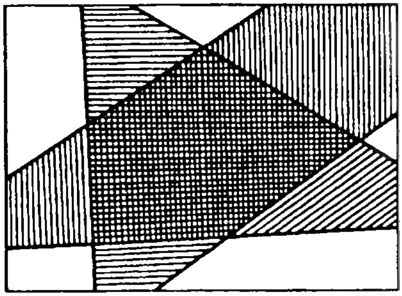


Рис. 110

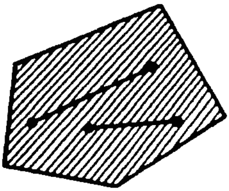


Рис. 111

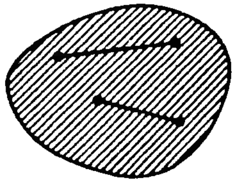


Рис. 112

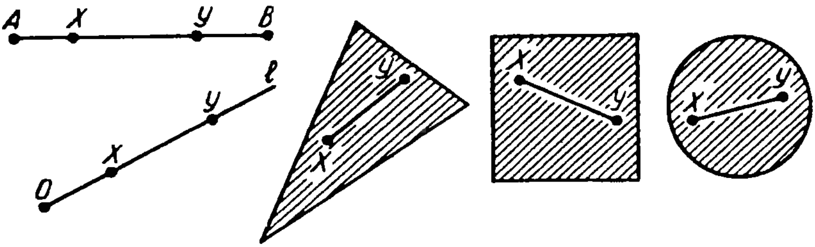


Рис. 113

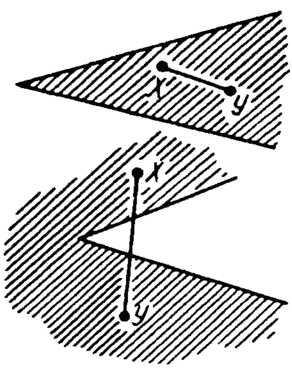


Рис. 114

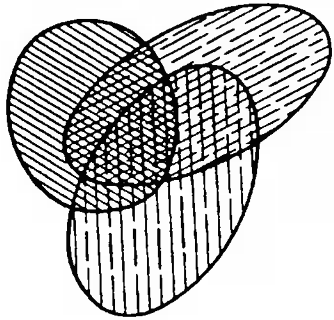


Рис. 115

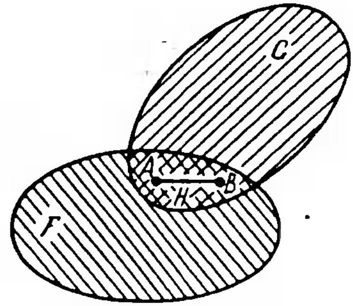


Рис. 116

7.2. Пересечение выпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают следующим важным свойством: *пересечение (общая часть) любой совокупности выпуклых фигур является выпуклой фигурой* (рис. 115).

Доказывается это свойство очень просто. Докажем его, например, для двух фигур. (Для общего случая доказательство аналогично.)

Пусть фигура H является пересечением двух выпуклых фигур F и G (рис. 116). Покажем, что H — выпуклая фигура. Возьмем любые две точки A и B фигуры H. Так как H состоит из общих точек фигур F и G, то точки A и B являются и точками фигур F и G. Поскольку эти фигуры выпуклы, отрезок AB, соединяющий A и B, содержится и в фигуре F, и в фигуре G. Следовательно, отрезок AB содержится и в фигуре H, а это означает, что H — выпуклая фигура.

Замечание. Проводя доказательство, мы взяли две произвольные точки A и B фигуры H. Но может оказаться, что у фигуры H нет двух точек, т. е. H состоит из одной точки или вообще не имеет точек, т. е. является пустым множеством. Давая определение выпуклой фигуры, мы специально оговорили эти два случая, включив такие фигуры в число выпуклых фигур. Если бы мы этого не сделали, то в формулировке теоремы о пересечении выпуклых фигур пришлось бы сделать оговорку о том, что пересечение не сводится к одной точке и не пусто.

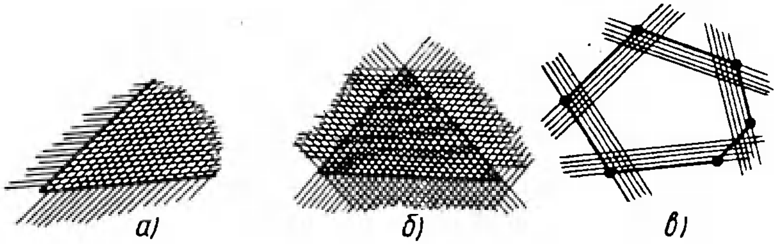


Рис. 117

Интересно, что все выпуклые фигуры, содержащие свои граничные точки, можно получить как результат пересечения выпуклых фигур одного вида — полуплоскостей. Например, выпуклый угол — это пересечение двух полуплоскостей (рис. 117, *а*), треугольник — трех (рис. 117, *б*), выпуклый n-угольник — n-полуплоскостей (рис. 117, *в*).

А чтобы получить круг, необходимо взять пересечение всех полуплоскостей, ограниченных касательными прямыми к кругу и содержащих этот круг (рис. 118).

Можно сказать, что полуплоскость в планиметрии важнейшая выпуклая фигура, поскольку из нее с помощью операции пересечения фигур можно получить любые выпуклые фигуры на плоскости.

7.3. Два подхода к понятию выпуклости многоугольника. В характерном свойстве выпуклого многоугольника, сформулированном в п. 7.1, содержатся два возможных определения выпуклости для многоугольника. Докажем это свойство и тем самым установим равносильность этих двух определений.

Вначале выпуклый многоугольник мы определяли как такой многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей сторону многоугольника. Теперь, когда мы дали определение выпуклости для произвольной фигуры, естественно задать вопрос: является ли выпуклый многоугольник выпуклой фигурой? Докажем, что это так.

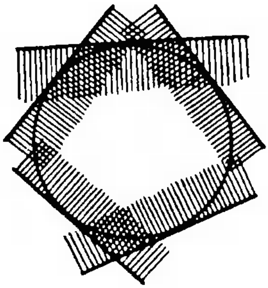


Рис. 118

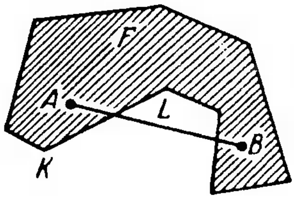


Рис. 119

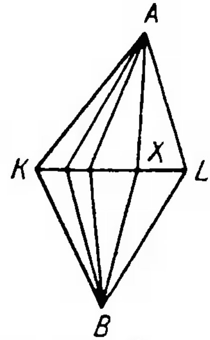


Рис. 120

Допустим противное, т. е. допустим, что некоторый выпуклый многоугольник F не является выпуклой фигурой. Тогда у F найдутся такие две точки A и B, что отрезок AB не содержится в F. Точки A и B можно выбрать так, что отрезок AB пересечет некоторую сторону KL многоугольника F (рис. 119). Но тогда F не может лежать с одной стороны от прямой KL. Мы пришли к противоречию с утверждением о выпуклости многоугольника F.

Докажем теперь обратное утверждение: если многоугольник F является выпуклой фигурой, то он лежит по одну сторону от каждой прямой, которая содержит сторону многоугольника. Снова применим способ «от противного». Допустим, что найдется такая сторона KL многоугольника F, что у многоугольника F имеются две точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой KL (рис. 120). Поскольку многоугольник F — выпуклая фигура, то каждый отрезок AX, соединяющий любую точку X отрезка KL с точкой A, содержится в F. Таким образом, весь треугольник AKL содержится в F. Аналогично и весь треугольник BKL содержится в F. Но тогда четырехугольник $AKBL$ содержится в F, а его диагональ KL лежит внутри F, т. е. не является стороной многоугольника F. Получили противоречие. Итак, многоугольник F, являющийся выпуклой фигурой, лежит по

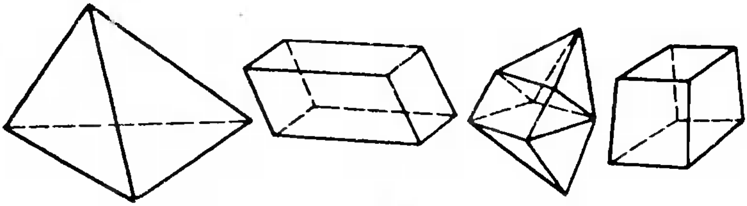


Рис. 121

одну сторону от каждой прямой, которая содержит сторону многоугольника.

Мы доказали, что два подхода к понятию выпуклости для многоугольников равносильны.

7.4. Выпуклые фигуры в пространстве. Определение выпуклой фигуры в пространстве аналогично определению выпуклой фигуры на плоскости. И утверждение о выпуклости пересечения выпуклых фигур доказывается точно так же: убедитесь в этом, повторив эти определения и доказательство. Аналогом выпуклых многоугольников являются выпуклые многогранники (рис. 121). Важной особенностью теории выпуклых фигур является то, что она строится аналогично для пространств различной размерности: от двумерных пространств — плоскостей, до n-мерных и даже бесконечномерных (есть в математике и такие пространства).

§ 8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ОКРУЖНОСТЕЙ

Посмотрите, как красиво сочетаются многоугольные фигуры и окружности в тех случаях, когда вершины многоугольников лежат на окружностях, т. е. **многоугольники вписаны в окружности**, или когда стороны многоугольников касаются окружностей, т. е. **многоугольники описаны около окружностей** (рис. 122).

С помощью вписанных и описанных многоугольников можно определить не только длину окружности и площадь круга, но и длину и площадь других криволи-

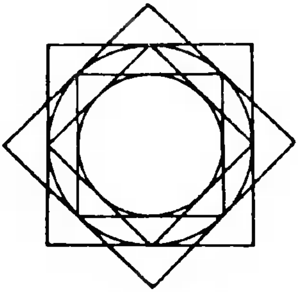


Рис. 122

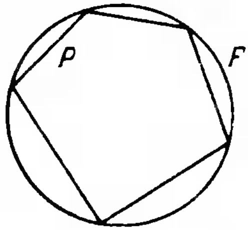


Рис. 123

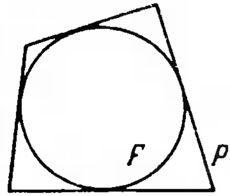


Рис. 124

нейных фигур. Мы рассматриваем лишь важнейшую из криволинейных фигур — окружность и будем изучать многоугольники, вписанные в окружность и описанные около нее.

Если многоугольник P вписан в окружность F, говорят также, что **окружность F описана около многоугольника P** (рис. 123). А в том случае, когда многоугольник P описан около окружности F, говорят, что **окружность F вписана в многоугольник P** (рис. 124).

8.1. Многоугольники, вписанные в окружность. Известно, что *около каждого треугольника ABC можно описать окружность F*, и что *центр O этой окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров сторон треугольника* (рис. 125). Ведь точка O должна быть равноудалена от всех вершин треугольника ABC, а множеством точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, является серединный перпендикуляр стороны, соединяющий эти вершины. Поэтому, находя центр окружности, описанной около треугольника, мы проводим серединные перпендикуляры двух сторон треугольника (рис. 126). Их точка пересечения O равноудалена от всех трех вершин треугольника и потому серединный перпендикуляр третьей стороны треугольника также пройдет через эту точку.

Описать окружность можно не около каждого четырехугольника. Например, около параллелограмма можно описать окружность лишь в том случае, когда паралле-

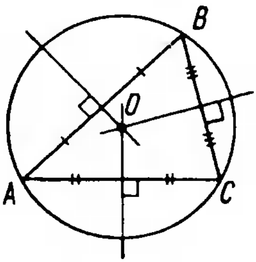


Рис. 125

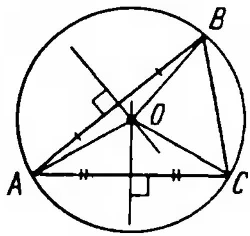


Рис. 126

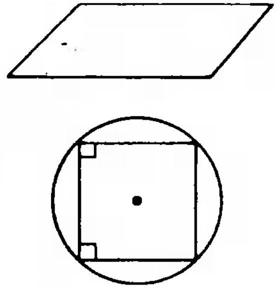


Рис. 127

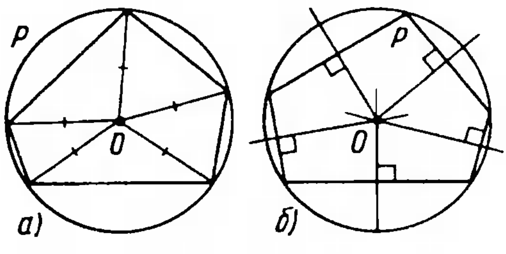


Рис. 128

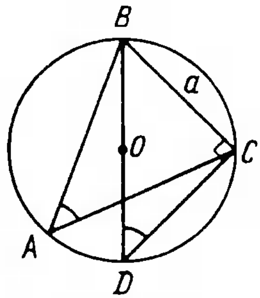


Рис. 129

лограмм является прямоугольником (рис. 127). Подумайте, как это объяснить.

Можно, например, объяснить так: у параллелограмма, не являющегося прямоугольником, нет точки, равноудаленной от всех его вершин.

Ясно, что и в общем случае *многоугольник P может быть вписан в окружность тогда и только тогда, когда существует точка O, равноудаленная от всех вершин многоугольника* (рис. 128, *а*). Если такая точка существует, то через нее проходят серединные перпендикуляры всех сторон многоугольника P (рис. 128, *б*).

Наконец, отметим, что окружность можно описать лишь около выпуклого многоугольника (почему?). Невыпуклый многоугольник в окружность вписать нельзя.

8.2. Диаметр окружности, описанной около треугольника. Вспомним теорему синусов. Согласно этой теореме *синусы углов треугольника ABC пропорциональ-*

ны сторонам этого треугольника, противоположным его углам, т. е. имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

Оказывается, что каждое из отношений в равенствах (1) равно диаметру окружности F, описанной около треугольника ABC (рис. 129), т. е. справедлива формула

$$2R = \frac{a}{\sin A}, \qquad (2)$$

где R — радиус окружности F. Докажем равенство (2).

Из вершины B проведем диаметр BD окружности F и построим треугольник BDC. Треугольник BDC вписан в окружность F. Его угол D равен углу A треугольника ABC (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Угол C в треугольнике BDC прямой (как угол, опирающийся на диаметр BD). Поэтому в прямоугольном треугольнике BDC отрезок $a = BC$ является катетом, лежащим против угла D, равного углу A. Гипотенузой в треугольнике BDC является отрезок $BD = 2R$. Следовательно,

$$a = 2R \sin A, \qquad (3)$$

т. е. справедливо равенство (2).

8.3. Четырехугольник, вписанный в окружность. Ответ на вопрос, когда четырехугольник можно вписать в окружность, дает следующее утверждение: *четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.*

В этом утверждении две взаимно обратные теоремы. Вот первая из них: *если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.*

Действительно, если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность F (рис. 130), то его углы A и C опираются

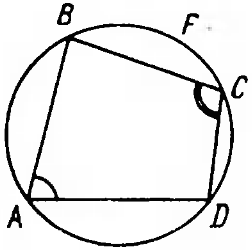


Рис. 130

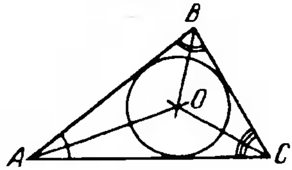


Рис. 131

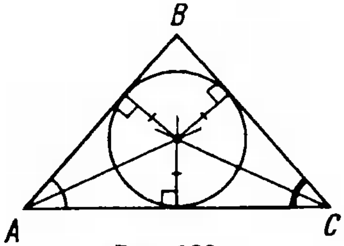


Рис. 132

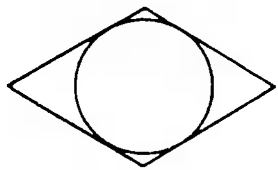


Рис. 133

на дуги, в сумме составляющие всю окружность F. Поэтому сумма мер этих углов равна 360°, а сумма мер углов A и C равна половине от 360°, т. е. 180°.

Обратное утверждение гласит: *если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около четырехугольника можно описать окружность.* Докажите это самостоятельно, применив, например, способ «от противного».

8.4. Многоугольники, описанные около окружности. Как вам известно, *в каждый треугольник ABC можно вписать окружность F с центром O на пересечении биссектрис треугольника* (рис. 131). Точка O должна быть равноудалена от сторон треугольника ABC, а потому она должна лежать на биссектрисе каждого угла треугольника.

Следовательно, находя центр окружности, вписанной в треугольник, мы проводим биссектрисы двух углов треугольника (рис. 132). Их точка пересечения O равноудалена от всех трех сторон треугольника. Поэтому бис-

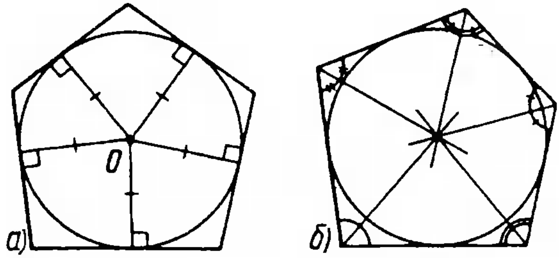


Рис. 134

сектриса третьего угла треугольника также пройдет через эту точку.

Далее замечаем, что не в каждый четырехугольник можно вписать окружность. Например, в параллелограмм можно вписать окружность только тогда, когда он является ромбом (рис. 133). Лишь в этом случае у параллелограмма имеется точка, равноудаленная от всех его сторон (почему?).

И в общем случае *в многоугольник можно вписать окружность лишь в том случае, когда найдется точка, равноудаленная от всех сторон многоугольника* (рис. 134, *а*). Если такая точка существует, то через нее проходят биссектрисы всех углов многоугольника (рис. 134, *b*).

Заметим еще, что вписать окружность можно лишь в выпуклый многоугольник (подумайте, почему).

8.5. Радиус окружности, вписанной в треугольник. Легче всего вычислить радиус r окружности, вписанной в треугольник, зная площадь S этого треугольника и его полупериметр $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Величины S, p, r связаны простой формулой

$$S = pr. \tag{4}$$

Выведем равенство (4). Пусть точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 135). В треугольниках OAB, OAC, OBC радиус r является вы-

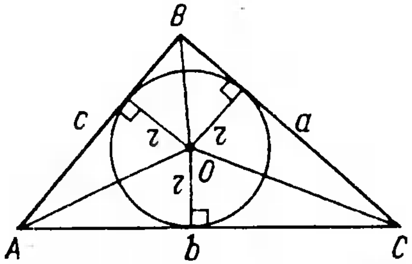


Рис. 135

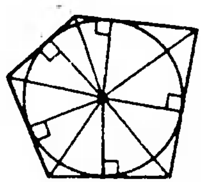


Рис. 136

сотой, опущенной на стороны $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Поэтому площадь

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr,$$

т. е. имеет место равенство (4).

Формула (4) справедлива и для многоугольника, в который вписана окружность радиуса r (рис. 136). Доказательство ее в этом случае такое же, как и для треугольника.

8.6. Свойство четырехугольника, описанного около окружности. Для четырехугольника, вписанного в окружность, мы установили в п. 8.3, что суммы его противоположных углов равны 180°, т. е. равны друг другу. Оказывается, аналогичным свойством, но уже для сторон, а не для углов, обладают четырехугольники, описанные около окружности, а именно: *у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.* Докажем это свойство.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O (рис. 137). Обозначим точки касания его сторон AB, BC, CD, DA с окружностью соответственно через K, L, M, N. Тогда имеют место равенства

$$AK = AN, \quad BK = BL, \quad CM = CL, \quad DM = DN. \qquad (5)$$

Чтобы получить первое из этих равенств, рассмотрим прямоугольные треугольники AOK и AON. Они имеют

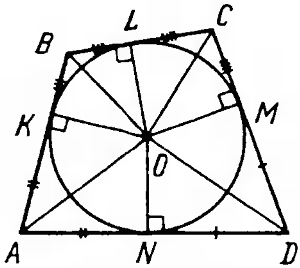


Рис. 137

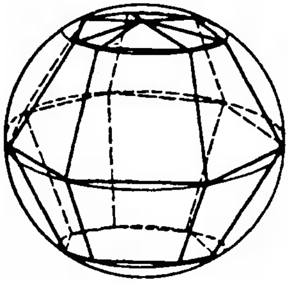


Рис. 138

общую гипотенузу AO и равные катеты OK и ON. Поэтому $\triangle AOK = \triangle AON$, следовательно, $AK = AN$. Аналогично получаются и остальные три равенства (5). Из равенств (5) следует, что

$$AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN, \qquad (6)$$

т. е.

$$AB + CD = AD + BC. \qquad (7)$$

Свойство четырехугольника, описанного около окружности, доказано.

Попробуйте выяснить, является ли это свойство характерным свойством четырехугольника, в который можно вписать окружность, т. е. верно ли утверждение: если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в четырехугольник можно вписать окружность. Рассмотрите сначала эти утверждения применительно к параллелограмму и трапеции.

8.7. Взаимное расположение многогранников и сферы. Аналогом многоугольников, вписанных в окружность, в пространстве являются многогранники, вписанные в сферу: все их вершины лежат на сфере (рис. 138). Если многогранник P вписан в сферу F, говорят также, что сфера F описана около многогранника P. В этом случае центр O сферы F равноудален от всех вершин многогранника P (на расстояние, равное радиусу сферы R). Следовательно, *многогранник может быть вписан в сфе-*

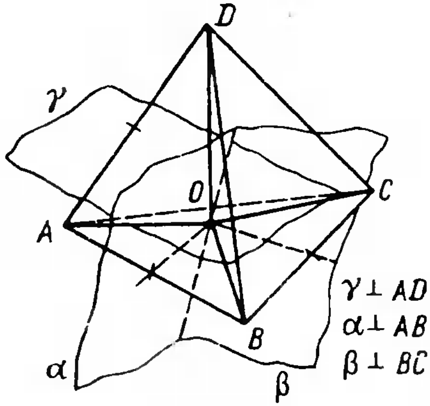


Рис. 139

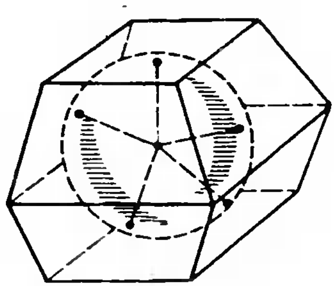


Рис. 140

ру тогда и только тогда, когда найдется точка, равноудаленная от всех вершин этого многогранника. Для каждого тетраэдра такой точкой является точка пересечения плоскостей, перпендикулярных ребрам тетраэдра и проведенных через их середины (рис. 139). Поэтому *около каждого тетраэдра можно описать сферу.* Но уже не около каждой четырехугольной пирамиды можно описать сферу. Сферу нельзя описать, например, около невыпуклой пирамиды.

Аналогом многоугольников, описанных около окружности, являются многогранники, описанные около сферы: все их грани касаются сферы (рис. 140). Если многогранник описан около сферы, говорят также, что сфера вписана в этот многогранник. В этом случае центр сферы равноудален от всех граней данного многогранника. Ясно, что *многогранник может быть описан около сферы тогда и только тогда, когда найдется точка, равноудаленная от всех граней этого многогранника.* Для каждого тетраэдра такая точка существует (укажите, где она лежит и как ее построить). Поэтому *в каждый тетраэдр можно вписать сферу.* Но для четырехугольных пирамид или параллелепипедов это утверждение уже не справедливо. Приведите соответствующие примеры.

Для многогранников, описанных около сферы, имеет место равенство, аналогичное равенству (4), доказанному в п. 8.5. Объем такого многогранника V, площадь его поверхности S и радиус вписанной в него сферы r связаны формулой

$$V = \frac{1}{3}Sr. \tag{8}$$

Объясните, как вывести равенство (8).

§ 9. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

9.1. Определение правильного многоугольника. Красоту, правильность формы каждой фигуре, как реальной, так и идеальной, придает обычно равенство ее элементов того или иного рода (рис. 141). Например, для архитектурных сооружений эта правильность заключается в равенстве размеров колонн или окон, а для многоугольников или многогранников — в равенстве их сторон, углов, граней (рис. 142). Среди многоугольников, имеющих одно и то же число сторон, самую красивую форму имеют те, у которых равны друг другу как углы,

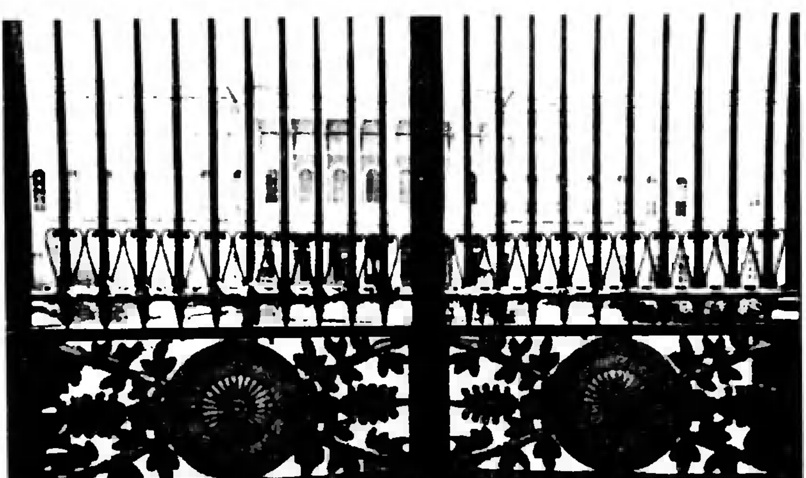


Рис. 141

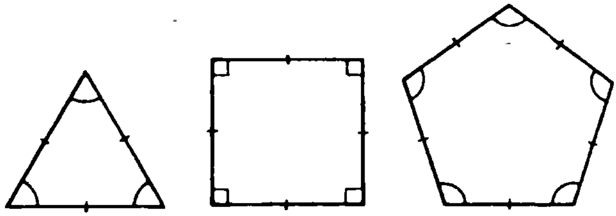


Рис. 142

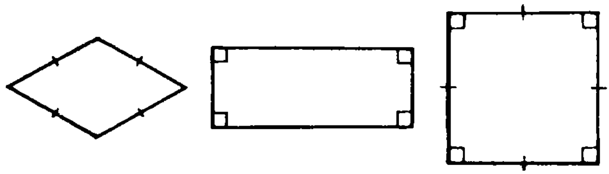


Рис. 143

так и стороны. Такие многоугольники и называются правильными.

Итак, **многоугольник называется правильным, если все его стороны равны друг другу и все его углы равны друг другу.**

Правильным треугольником является хорошо известный равносторонний треугольник: у него все углы равны друг другу.

Для тех же многоугольников, у которых число сторон больше трех, ни из равенства сторон не следует равенство углов, ни из равенства углов не следует равенство сторон. Так, равносторонний четырехугольник — это ромб. Его углы равны друг другу лишь тогда, когда он является квадратом. С другой стороны, четырехугольник, имеющий равные друг другу углы — это прямоугольник. Стороны же его равны лишь тогда, когда он является квадратом (рис. 143).

Так как сумма углов n-угольника равна $(n-2)\,180°$, то угол φ_n правильного n-угольника вычисляется по формуле

$$\varphi_n = \frac{n-2}{n}180°. \qquad (1)$$

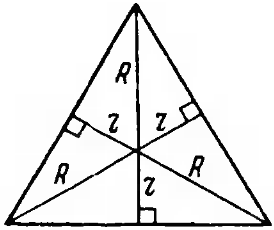


Рис. 144

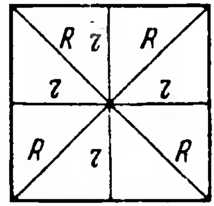


Рис. 145

9.2. Центр правильного многоугольника. Вы, наверное, уже заметили, что в правильном треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают (рис. 144). Эта точка равноудалена и от сторон и от вершин правильного треугольника. И точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена и от сторон и от вершин квадрата, т. е. является центром вписанной и описанной окружностей квадрата (рис. 145). Оказывается, что точка, равноудаленная от всех сторон и от всех вершин, есть в каждом правильном многоугольнике. Такая точка называется **центром правильного многоугольника**. Докажем существование этого центра.

ТЕОРЕМА. **В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.**

Доказательство. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. Проведем биссектрисы p и q его углов A_1 и A_2 (рис. 146). Лучи p и q пересекутся, так как образуют с отрезком A_1A_2 равные острые углы (они обозначены на рис. 146 цифрами 1 и 2). Действительно, углы 1 и 2 равны как половины равных углов A_1 и A_2 многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Эти углы будут острыми, так как углы правильного многоугольника меньше 180° (см. формулу (1) в п. 9.1).

Докажем, что точка O, в которой пересекутся лучи p и q, равноудалена от всех вершин $A_1, A_2, \dots, A_n$, т. е. $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то тре-

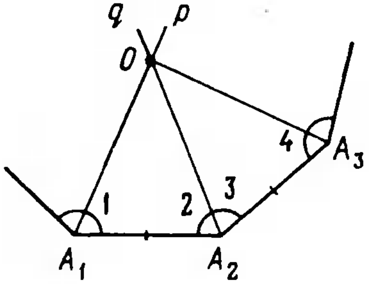


Рис. 146

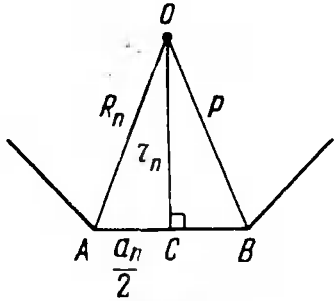


Рис. 147

угольник OA_1A_2 — равнобедренный. Поэтому $OA_1 = OA_2$. Далее, $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$, так как $A_1A_2 = A_2A_3$, сторона OA_2 у них общая и $\angle 2 = \angle 3$ (поскольку OA_2 — биссектриса угла A_2). Значит, $OA_1 = OA_3$. Отсюда заключаем, что $OA_3 = OA_2$ и $\angle 4 = \angle 3$. Следовательно, треугольник OA_2A_3 — равнобедренный и равен треугольнику OA_1A_2. Поэтому его углы *3* и *4* равны половине угла многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Значит, луч OA_3 — биссектриса угла A_3. Повторяя проведенные рассуждения, мы получим нужные равенства: $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$.

Докажем теперь, что точка O равноудалена от всех сторон правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Как ясно из предыдущего, треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., OA_nA_1 — это равнобедренные, равные друг другу треугольники. Следовательно, равны и их высоты, проведенные на основания, т. е. на стороны правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Поэтому точка O равноудалена от сторон этого многоугольника. Итак, точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$.

Из доказанной теоремы следует, что, во-первых, *около правильного многоугольника можно провести окружность* и, во-вторых, *в правильный многоугольник можно вписать окружность*.

9.3. Метрические соотношения в правильных многоугольниках. Рассмотрим правильный n-угольник P с центром O (рис. 147). Одну из его сторон обозначим

AB. Из центра O на сторону AB опустим перпендикуляр OC. Как доказано в п. 9.2, OA — радиус окружности, описанной около P, а OC — радиус окружности, вписанной в P. Отрезок OC называется также **апофемой правильного многоугольника** P.

Введем обозначения: $OA = R_n$, $OC = r_n$ и $AB = a_n$. В прямоугольном треугольнике OAC гипотенуза $OA = R_n$, катеты $OC = r_n$ и $AC = \frac{a_n}{2}$, а $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180^\circ}{n}$. Поэтому между этими величинами имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}a_n = R_n \sin\frac{180^\circ}{n}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}a_n = r_n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}; \tag{3}$$

$$r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n}. \tag{4}$$

Поскольку периметр p_n многоугольника P равен na_n, то из равенства (2) вытекает, что

$$p_n = 2nR_n \sin\frac{180^\circ}{n}. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что *периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.*

9.4. Построение правильных многоугольников циркулем и линейкой. Задача о построении правильного n-угольника равносильна задаче о делении окружности на n равных дуг (рис. 148). Конечно, задача о делении окружности на равные дуги практически решается с помощью измерительных и чертежных инструментов для любых натуральных чисел n: например, при изготовлении циферблатов часов с минутными делениями ($n = 60$), транспортиров ($n = 360$), при строительстве амфитеатров цирков (число n выбирает строитель) и т. д. Но здесь

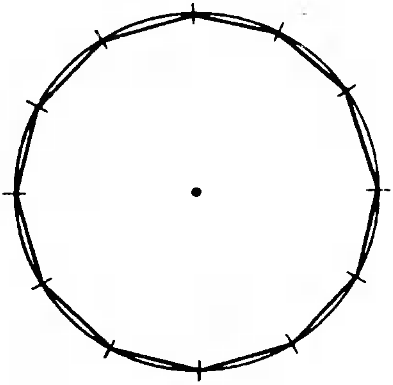


Рис. 148

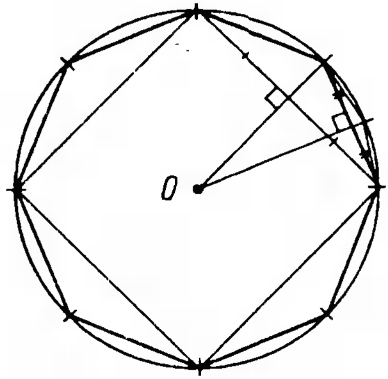


Рис. 149

речь пойдет о возможности построить правильный n-угольник классическими инструментами геометрии — циркулем и линейкой.

Эта задача имеет интересную многовековую историю, идущую от «Начал» Евклида и завершившуюся лишь в самом конце XVIII в., когда в 1796 г. девятнадцатилетний Карл Гаусс (1777—1855) дал ее окончательное решение.

В первом Предложении книги I «Начал» Евклида строится правильный треугольник. Квадрат Евклид строит в конце книги I перед доказательством теоремы Пифагора (Предложение 46). Значительная часть книги IV «Начал» посвящена построению правильных многоугольников, в том числе вписанных в данную окружность или описанных около нее. Так, в Предложениях 11 и 12 книги IV речь идет о построении правильного пятиугольника, в Предложении 15 — о построении правильного шестиугольника, а в Предложении 16 (последнем в книге IV) — о построении правильного пятнадцатиугольника.

Возникает вопрос: почему же после шестиугольника в «Началах» Евклида речь идет сразу о пятнадцатиугольнике, а, например, не о семиугольнике?

Легко заметить, что, поделив пополам дуги окружности, стягиваемые сторонами вписанного в нее правильного n-угольника, получим вершины правильного $2n$-угольника (рис. 149). Этот процесс удвоения вершин можно повторять. Таким образом из квадрата можно получить правильный восьми- и шестнадцатиугольники, из правильного пятиугольника — правильный десятиугольник, из правильного шестиугольника — правильный двенадцатиугольник и т. д. Но правильный семиугольник так не получить. Нельзя его построить циркулем и линейкой и другими методами.

К. Гаусс, используя средства алгебры, доказал, что циркулем и линейкой правильный n-угольник можно построить лишь тогда, когда число n имеет следующее разложение на множители:

$$n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_k, \tag{6}$$

где m — неотрицательное целое число, а $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа вида $2^{2^s} + 1$ (s — неотрицательное целое число). Эти простые числа называются **числами Ферма**, и пока известно лишь пять таких чисел: $s = 0$, $p_0 = 3$; $s = 1$, $p_1 = 5$; $s = 2$, $p_2 = 17$; $s = 3$, $p_3 = 257$; $s = 4$, $p_4 = 65\,537$. В разложении (6) числа p_i могут повторяться.

Числа 7, 9, 11, 13, 14, 18, ... не имеют вида (6), и соответствующие им правильные многоугольники не могут быть построены циркулем и линейкой.

К. Гаусс решил задачу о построении правильного семнадцатиугольника (а также и о построении правильного 257-угольника). Он очень гордился решением этой задачи и завещал изобразить правильный семнадцатиугольник, вписанный в окружность, на своем надгробии.

Вписать в окружность правильный шестиугольник легко: его сторона равна радиусу окружности. Построить правильный пятиугольник труднее. О том, как он строится, и о некоторых других, связанных с ним интересных задачах геометрии, мы расскажем в следующем пункте.

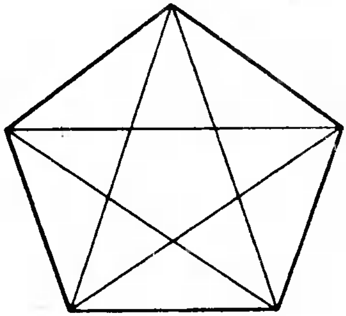


Рис. 150

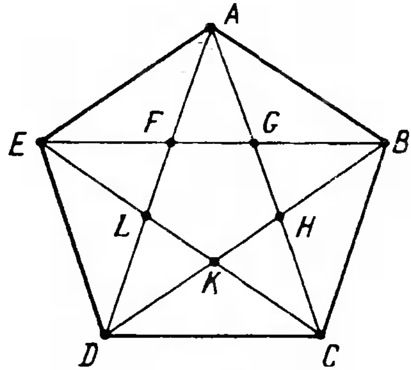


Рис. 151

9.5. Пентаграмма и «золотое сечение». **Пентаграммой** называют фигуру, образованную диагоналями правильного пятиугольника, т. е. правильную пятиконечную звезду (рис. 150). На протяжении тысячелетий люди разных стран и эпох использовали эту фигуру как символ, часто придавая ей мистический смысл (символика пифагорейцев в Древней Греции, символика Красной Армии и рубиновых звезд на башнях Кремля). Во многом это связано с замечательными геометрическими свойствами правильного пятиугольника и вписанной в него пентаграммы. Перечислим эти свойства (попробуйте самостоятельно найти их доказательства).

Пусть в правильном пятиугольнике $P = ABCDE$ диагонали пересекаются в точках P, G, H, K, L (рис. 151).

1) Диагонали пятиугольника P делят каждый его угол на три равные части.

2) Треугольники ACD, ABC, HDC — равнобедренные.

3) DH — биссектриса в треугольнике ACD.

4) Треугольники ACD и DHC подобны.

5) Диагонали правильного пятиугольника делятся точкой пересечения в «золотой пропорции», т. е. выполняется равенство

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AH}{HC}. \qquad (7)$$

Из этого равенства следует, что точка H делит отрезок

AC на такие части, что «целое» (отрезок AC) так относится к большей части (AH), как эта бо́льшая часть относится к меньшей (HC). Такое деление отрезка в Древней Греции называли «золотой пропорцией», а в эпоху Возрождения — «божественной пропорцией». Леонардо да Винчи назвал это разбиение отрезка «золотым сечением». Математики именуют его также делением отрезка в среднем и крайнем отношении. Астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630) говорил: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в крайнем и среднем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень».

О роли теоремы Пифагора нам уже хорошо известно: на ее «золото» мы уже «приобрели» очень много геометрических богатств. «Золотое сечение» нам встретилось впервые, и мы могли бы пройти мимо него: ведь драгоценный камень — это украшение, предмет роскоши. Однако «золотое сечение» постоянно появляется в искусстве: архитектуре, живописи, музыке. Об этом можно подробнее прочитать в популярных книгах А. В. Волошинова «Математика и искусство» (М.: Просвещение, 1992) и «Пифагор» (М.: Просвещение, 1993) или в более специальной книге И. Ш. Шевелева, М. А. Марутаева, И. П. Шмелева «Золотое сечение» (М.: Стройиздат, 1990). У этой книги есть и второе название — «Три взгляда на природу гармонии», в ней рассказывается о роли «золотого сечения» в природе, прежде всего в живой природе. Мы же возвращаемся к геометрии и покажем, как можно осуществить циркулем и линейкой «золотое сечение» отрезка и как это построение можно использовать при построении правильного пятиугольника.

Применим алгебраический метод. Положим $AC = a$, а $AH = x$. Тогда равенство (7) запишется в виде

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}. \qquad (8)$$

Равенство (8) приводит к квадратному уравнению

$$x^2 + ax - a^2 = 0, \qquad (9)$$

которое имеет два решения: одно положительное и одно отрицательное. Отрезку $x = AH$ соответствует лишь положительное решение:

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}. \qquad (10)$$

Чтобы построить циркулем и линейкой такой отрезок x, строим прямоугольный треугольник с катетами a и $\frac{a}{2}$, а затем вычитаем из его гипотенузы отрезок $\frac{a}{2}$ (рис. 152). Именно так решал эту задачу Евклид в Предложении 11 в книге II «Начал».

Численное значение «золотого отношения»

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \qquad (11)$$

Приближенные и все более точные значения этого иррационального числа дают члены рациональной последовательности чисел $\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ (подумайте, как они получаются). Обозначение Ф связывают с именем знаменитого древнегреческого скульптора Фидия.

Рассматривая рис. 153 и 154 попытайтесь найти свойства последовательностей $\Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots$ и $1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$, где

$$\varphi = \frac{1}{\Phi}. \qquad (12)$$

Отметим лишь одно из них

$$\Phi^{n-2} + \Phi^{n-1} = \Phi^n. \qquad (13)$$

Теперь построить правильный пятиугольник с заданной диагональю a мы можем так. Разделим диагональ a

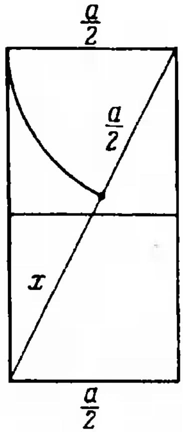


Рис. 152

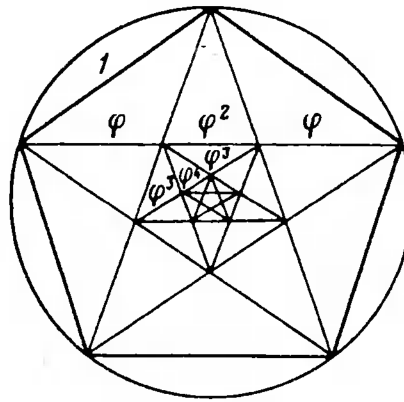
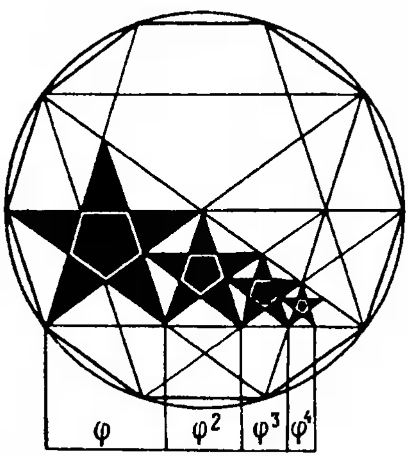


Рис. 153



$$\varphi + \varphi^2 = 1$$

Рис. 154

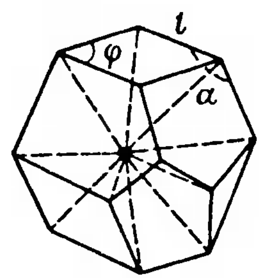


Рис. 155

в крайнем и среднем отношении Ф и построим отрезок x по формуле (10). Затем построим равнобедренный треугольник ACD со сторонами $AC = AD = a$, $CD = x$. Пристроим к нему два равнобедренных треугольника AED и ABC с основаниями a и боковыми сторонами x. Задача решена. Именно так строили правильный пятиугольник в Древней Греции еще во времена Пифагора.

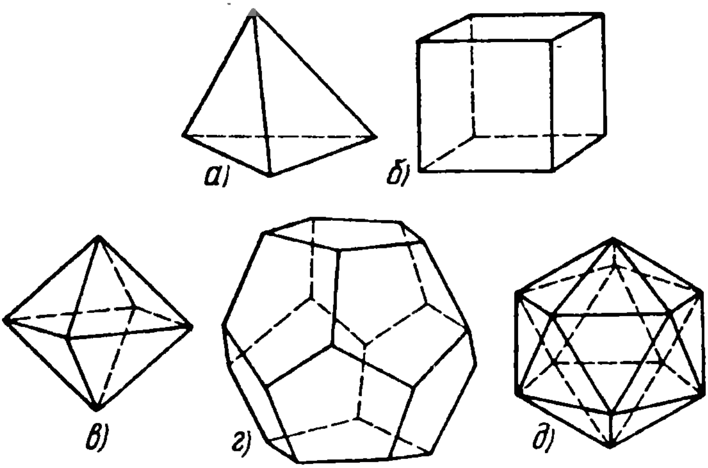


Рис. 156

9.6. Правильные многогранники. Правильность некоторой геометрической фигуры состоит в равенстве ее элементов. Так, у правильных многоугольников равны их стороны и углы. Элементами многогранников являются их ребра, плоские углы граней и двугранные углы при ребрах (рис. 155).

Поэтому **правильным многогранником** естественно назвать такой многогранник, у которого равны друг другу все ребра, все плоские углы граней и все двугранные углы. У такого многогранника все грани должны быть одинаковыми правильными многоугольниками. Оказывается, что таких многогранников всего пять видов (в отличие от правильных многоугольников, которых бесконечно много, так как для каждого натурального $n \geqslant 3$ существует правильный n-угольник).

То, что правильных многогранников всего пять видов, было известно еще в Древней Греции, и «Начала» Евклида завершаются следующим Предложением: «Вот я утверждаю, что, кроме упомянутых пяти тел, нельзя построить другого тела, заключенного между равносторонними и равноугольными равными друг другу многогранниками». Последняя, XIII книга «Начал» посвящена построению пяти правильных многогранников: тетраэдра (рис. 156, *а*), куба (рис. 156, *б*), октаэдра (рис. 156, *в*), додекаэдра (рис. 156, *г*), икосаэдра (рис. 156, *д*). Древние греки называли их платоновыми телами в честь философа Платона, придававшего изучению геометрии особое значение.

§ 10. ИЗМЕРЕНИЕ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

Мы переходим к измерению длин, площадей и объемов криволинейных фигур. С одной стороны, при изучении этой темы нам необходимо уяснить определения этих величин. Например, что такое длина окружности, площадь круга или объем шара? Эти вопросы геометры в древности, например, времен Евклида, не обсуждали, считая понятие об этих величинах интуитивно ясным. Теперь же эти вопросы обсуждаются даже в школьных курсах геометрии.

С другой стороны, мы должны знать формулы для вычисления длин, площадей, объемов. Выводом таких формул занимались еще геометры древности. Практическое значение этих формул очевидно, и вам давно уже известно, что длина L окружности радиуса R вычисляется по формуле

$$L = 2\pi R, \tag{1}$$

а площадь S ограниченного ею круга по формуле

$$S = \pi R^2, \tag{2}$$

где число π — иррациональное и приближенно равно 3,14.

Из формул (1) и (2) следует, что *длина окружности пропорциональна ее диаметру, а площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса с одним и тем же коэффициентом пропорциональности — числом* π. Это знаменитое число заслуживает отдельного рассказа о нем, и такому рассказу посвящен п. 10.4.

Рис. 157

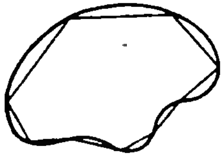


Рис. 158

10.1. Длина кривой линии. Любую кривую линию можно представить себе как пройденный кем-то путь, а длину пути, как известно, можно измерить по километровым или стометровым указателям, расставленным вдоль шоссе или железной дороги, по флажкам, размечающим дистанцию кросса или даже просто измерив шагами не слишком длинную извилистую тропинку. Во всех перечисленных случаях длину линии измеряют, складывая последовательно длины прямолинейных отрезков, концы которых лежат на данной линии (рис. 157). Эти отрезки образуют ломаную, которая дает более или менее точное значение длины линии. Этот практический способ и лежит в основе определения длины линии в геометрии.

Ломаная, вершины которой последовательно лежат на данной линии от одного ее конца до другого, называется **ломаной, вписанной в данную линию**.

Если линия замкнута (например, окружность или дистанция кросса, старт и финиш которого находятся в одном месте), то в эту линию вписывают замкнутую ломаную (рис. 158).

Длина кривой линии (обычно говорят **кривой**, опуская слово «линии») приближенно равна длине вписанной в нее ломаной и вычисляется тем точнее, чем чаще располагаются вершины ломаных на данной кривой.

Итак, **длиной кривой** называется такое число, от которого длины вписанных в кривую ломаных отличаются сколь угодно мало, как только вершины ломаных располагаются достаточно часто. При этом, конечно, длины ломаных измеряются в одной и той же единице измерения, и длина кривой считается измеренной в той же единице.

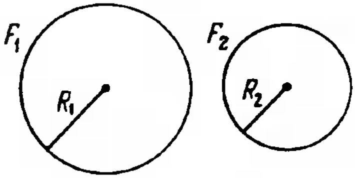


Рис. 159

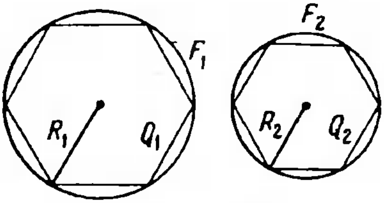


Рис. 160

Это же определение формулируют и так: *длиной кривой называется предел длин вписанных в нее ломаных, когда вершины ломаных сколь угодно часто располагаются на данной кривой.*

10.2. Длина окружности. Формула (1) показывает, что длина окружности связана с радиусом окружности самой простой функциональной зависимостью: *длина окружности пропорциональна ее радиусу*. Именно это нам и предстоит доказать в этом пункте.

Пропорциональность длины окружности ее радиусу означает, что отношения длин L_1 и L_2 двух окружностей F_1 и F_2 (рис. 159) к их радиусам R_1 и R_2 равны, т. е.

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}. \qquad (3)$$

Равенство (3) равносильно равенству

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (4)$$

Именно равенство (4) мы и докажем.

Разделим окружности F_1 и F_2 на некоторое число n равных дуг и впишем в F_1 и F_2 правильные n-угольники Q_1 и Q_2 (рис. 160).

Применяя формулу (5) п. 9.3, находим периметры p_1 и p_2 многоугольников Q_1 и Q_2:

$$p_1 = 2nR_1 \sin\frac{180°}{n}$$

и

$$p_2 = 2nR_2 \sin\frac{180°}{n}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (6)$$

Если неограниченно увеличивать число сторон многоугольников Q_1 и Q_2 (например, удваивать его), то их периметры будут сколь угодно мало отличаться от длин L_1 и L_2 окружностей F_1 и F_2.

Но тогда число $\frac{p_1}{p_2}$ будет сколь угодно мало отличаться от величины $\frac{L_1}{L_2}$. Поскольку $\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}$, число $\frac{L_1}{L_2}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{R_1}{R_2}$. Но такое возможно лишь тогда, когда эти числа равны, поэтому справедливо равенство $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$, а значит, и равенство $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$. Этот результат мы сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. **Длина окружности пропорциональна ее радиусу.**

Из этой теоремы следует, что отношение $\frac{L}{2R}$, т. е. длины окружности к ее диаметру, есть величина постоянная. Оно и обозначается буквой π. Введя такое обозначение, получаем формулу (1): $L = 2\pi R$.

10.3. Площадь круга. Число π является не только отношением длины окружности к ее диаметру, но и отношением площади круга к площади квадрата, построен-

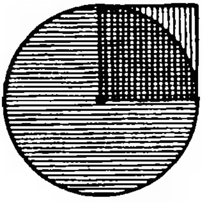


Рис. 161

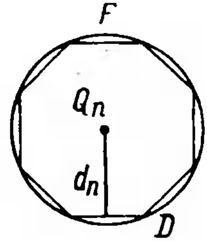


Рис. 162

ного на его радиусе (рис. 161). Докажем это утверждение, т. е. выведем формулу (2): $S = 2\pi R^2$.

Рассмотрим круг D радиуса R, ограниченный окружностью F (рис. 162). Впишем в круг D правильный n-угольник Q_n. Пусть S и S_n — площади круга D и многоугольника Q_n соответственно; L — длина окружности F; p_n — периметр многоугольника Q_n; d_n — апофема многоугольника Q_n. Тогда

$$S_n = \frac{1}{2} p_n d_n, \qquad (7)$$

откуда

$$\frac{S_n}{p_n} = \frac{1}{2} d_n.$$

Когда число n неограниченно возрастает, величина p_n сколь угодно мало отличается от длины L окружности F, а площадь S_n сколь угодно мало отличается от S. Тогда число $\frac{S}{L}$ сколь угодно мало отличается от величины $\frac{S_n}{p_n}$, а тем самым и от величины $\frac{1}{2} d_n$, равной отношению $\frac{S_n}{p_n}$. В свою очередь, при возрастании n апофема d_n сколь угодно мало отличается от радиуса R, а потому сколь угодно близки $\frac{1}{2} R$ и $\frac{1}{2} d_n$. Но тогда сколь угодно близки и два числа $\frac{S}{L}$ и $\frac{1}{2} R$. А это возможно лишь в том случае, когда эти числа равны, т. е.

$$\frac{S}{L} = \frac{1}{2}R.$$

Следовательно,

$$S = L\frac{1}{2}R = 2\pi R\frac{1}{2}R = \pi R^2.$$

Мы доказали равенство (2): $S = \pi R^2$.

10.4. О числе π. У многих древних народов (например, в Вавилоне, Китае и даже в Древнем Риме) при вычислении площади круга использовали весьма грубое приближение числа π, равное 3. Но в Древнем Египте уже за восемнадцать веков до нашей эры при решении этой задачи использовали весьма хорошее приближенное значение для π:

$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605\ldots$$

Спустя 1500 лет Архимед (ок. 287—212 до н. э.) в своем сочинении «Об измерении круга» дал такие приближения:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \qquad \pi \approx 3{,}14.$$

Вот как Архимед сформулировал эти результаты: *периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых.*

Этот результат Архимед получил, выразив через диаметр окружности периметр вписанного в нее правильного 96-угольника.

Индийский математик и астроном Ариабхата (ок. 475—?) нашел еще более точное приближение: $\pi \approx 3{,}1416$. Работавший в Самарканде в знаменитой обсерватории Улугбека математик аль-Каши дал приближенное значение для π с 16 верными знаками. Он рассматривал вписанный в окружность правильный многоугольник с 800 335 168 сторонами. Математик Леонард Эйлер (1707—1783), применяя методы высшей математики, нашел для π приближение с 153 верными знаками. Современные ЭВМ могут находить приближения π с десятками тысяч верных знаков, но, конечно, для практики такие приближения не нужны.

Обозначение буквой π отношения длины окружности к ее диаметру ввел в XVIII в. Леонард Эйлер. Буква π — это первая буква в греческом слове περιφερεια — периферия, что означает «окружность».

10.5. Длина дуги окружности и площадь сектора. Два радиуса, проведенные из центра круга, делят его на два сектора, а окружность на две дуги. Эти дуги соответствуют двум центральным углам (рис. 163). Углу в один градус соответствует дуга, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности, т. е. ее длина равна $\frac{\pi}{360} R^2$. Поэтому длина l дуги, соответствующей центральному углу в $\alpha°$, вычисляется по формуле

$$l = \frac{\pi\alpha}{180} R. \tag{8}$$

Аналогично площадь сектора с центральным углом 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга, а потому равна $\frac{\pi}{360} R^2$. Следовательно, площадь сектора с центральным углом $\alpha°$ вычисляется по формуле

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi\alpha}{360} R^2. \tag{9}$$

10.6. Квадратура круга. В «Геометрии-7» (п. 2.7) мы уже рассказывали о трех классических задачах древнос-

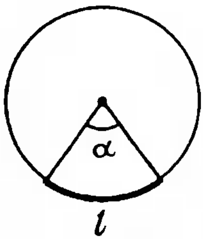


Рис. 163

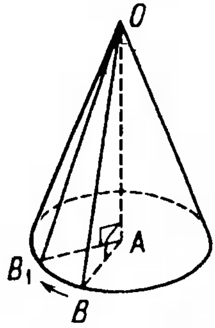


Рис. 164

ти, решить которые с помощью циркуля и линейки невозможно. Среди них была и задача о построении квадрата, равновеликого данному кругу. Ее и называют квадратурой круга. Квадратурой круга стали называть неразрешимые задачи. Доказать же, что задача о квадратуре круга неразрешима смог в 1882 г. немецкий математик Карл Линдеман (1852—1939). Он доказал, что число π — трансцендентное, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Геометрические задачи на построение, решение которых возможно с помощью циркуля и линейки, могут быть сведены к решению некоторых алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Веком ранее (в конце XVIII в.) Иоганн Ламберт (1728—1777) и Адриен Лежандр (1752—1833) установили, что число π — иррациональное, но этим задача о квадратуре круга еще не решалась.

10.7. Конус и цилиндр. Вот как определяет конус и цилиндр Евклид, начиная свои стереометрические книги (книги XI—XIII «Начал»):

«Определение 18. Конус будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, прилегающих к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть конус» (рис. 164).

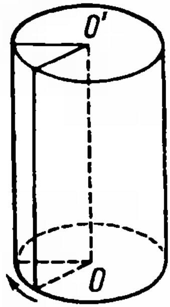


Рис. 165

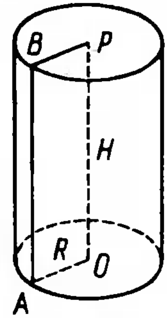


Рис. 166

«Определение 19. Ось же конуса есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается треугольник.

Определение 20. Основание же — круг, описываемый вращающейся прямой.

Определение 21. Цилиндр будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольника, вращающийся прямоугольник снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура будет цилиндром» (рис. 165).

«Определение 22. Ось же цилиндра есть неподвижная прямая, вокруг которой поворачивается прямоугольник.

Определение 23. Основания же — круги, описываемые вращающимися двумя противоположными сторонами».

Нам предстоит выяснить, как находят объемы конуса и цилиндра и измеряют площади их поверхностей. Начнем с цилиндра.

Пусть цилиндр C получается вращением прямоугольника $AOPB$ вокруг стороны $OP = H$ (рис. 166). Основаниями цилиндра C являются два круга с радиусами $AO = R$. Расстояние между плоскостями оснований цилиндра C равно H, поэтому H называется высотой цилиндра.

Нетрудно догадаться, как вычислить объем цилиндра: прямая призма похожа на цилиндр (у нее только ос-

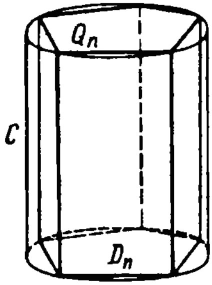


Рис. 167

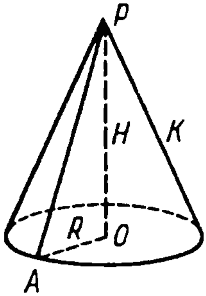


Рис. 168

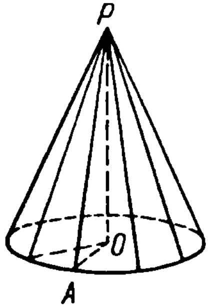


Рис. 169

нование не круглое, а многоугольное). Поэтому естественно предположить, что формула объема цилиндра аналогична формуле для вычисления объема призмы: объем будет равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн}} H.$$

Действительно, и *объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту*, т. е. вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 H. \qquad (10)$$

Легко догадаться и как доказать это утверждение. Подобно тому, как при вычислении площади круга мы вписывали в него правильные n-угольники, теперь мы будем рассматривать призмы Q_n, основания которых — правильные n-угольники D_n, вписанные в основания цилиндра (рис. 167). (О таких призмах говорят, что они вписаны в цилиндр.)

Когда число n неограниченно возрастает, объем V_n призмы Q_n сколь угодно мало отличается от объема V цилиндра C, а площадь S_n многоугольника D_n сколь угодно мало отличается от площади S основания цилиндра C. Поэтому величины $S_n H$ сколь угодно мало отличаются от числа $\pi R^2 H$. Однако

$$V_n = \pi S_n H. \qquad (11)$$

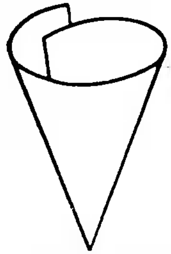


Рис. 170

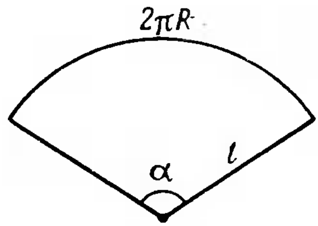


Рис. 171

Поэтому числа V и πR^2H отличаются сколь угодно мало. А это возможно лишь в том случае, когда они равны, т. е. справедливо выражение (10).

Рассмотрим теперь конус K, образованный вращением прямоугольного треугольника POA вокруг катета $PO = H$ (рис. 168). Точка P называется **вершиной** конуса K, а отрезок PO — его **высотой** (подумайте, почему). Находя объем конуса, естественно проводить аналогию с пирамидой. Впишите в конус правильную n-угольную пирамиду, и вы без труда получите формулу для вычисления объема V конуса K, у которого радиус основания $OA = R$ и высота $PO = H$:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (12)$$

Те отрезки, которые соединяют вершину P конуса K с точками на окружности его основания, называются **образующими конуса** K (рис. 169). Образующие конуса заполняют **боковую поверхность конуса.** Эту боковую поверхность образует вращающаяся гипотенуза прямоугольного треугольника POA. Такие конические поверхности вы, конечно, не раз получали, сворачивая кульки из бумаги (рис. 170). Чтобы подсчитать площадь $S_{б.к}$ боковой поверхности конуса K, можно, наоборот, развернуть эту боковую поверхность на плоскость (предварительно «разрезав» ее по одной из образующих). В результате «развертывания» получится сектор F круга, радиус которого равен длине образующей l конуса K (рис. 171). Длина дуги этого сектора равна длине окруж-

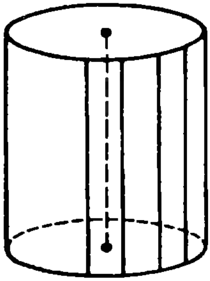


Рис. 172

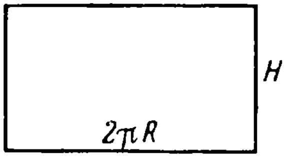


Рис. 173

ности основания конуса K, т. е. $2\pi R$. Применяя формулу длины дуги сектора (8) из п. 10.5, находим величину угла α сектора F:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{\pi l}180^\circ = \frac{360^\circ R}{l}. \qquad (13)$$

Если теперь это значение α подставить в формулу площади сектора (9), то получим формулу для определения площади боковой поверхности конуса K:

$$S_{\text{б.к}} = \pi l R. \qquad (14)$$

Боковая поверхность цилиндра состоит из равных друг другу отрезков, параллельных оси цилиндра (рис. 172). Эти отрезки называются **образующими цилиндра**. Их концы лежат на основаниях цилиндра.

Боковую поверхность цилиндра можно разрезать по одной из ее образующих и развернуть на плоскость в прямоугольник (рис. 173). Одна из сторон получившегося прямоугольника равна образующей цилиндра, а значит, и его высоте H. Длина другой стороны равна длине окружности основания цилиндра, т. е. $2\pi R$, где R — радиус основания цилиндра.

Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S_{\text{б.ц}} = 2\pi RH. \qquad (15)$$

Выведите формулы (14) и (15), приближая конус и цилиндр к вписанным в них пирамидам и призмам.

Найдите также формулы для полной поверхности конуса и полной поверхности цилиндра.

Комментарий

Слово «конус» происходит от греческого слова, означающего «сосновая шишка», «остроконечная верхушка шлема».

10.8. Объем шара и площадь сферы. Задача об измерении объема шара и площади сферы намного труднее задач об измерении цилиндра и конуса, хотя бы уже тем, что никакую часть сферы нельзя развернуть на плоскость, подобно тому, как мы разворачивали на плоскость боковые поверхности конуса и цилиндра. Решение этих задач нашел величайший ученый древности (а может быть, и не только древности) Архимед. Он изложил их в своем сочинении «О шаре и цилиндре». Вот сокращенное начало этого сочинения.

«Архимед Досифею желает радоваться!

Я уже послал тебе запись наших открытий вместе с доказательством, что всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом одно и то же основание и одинаковую высоту; позднее, когда нам пришли на ум другие стоящие внимания теоремы, мы потрудились над их доказательствами. Теоремы эти таковы:

во-первых, *поверхность всякого шара в четыре раза больше его большого круга;*

кроме того, *для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой — прямую, равную диаметру шара, и сам будет в полтора раза больше этого шара, и поверхность его тоже в полтора раза больше поверхности этого шара* (рис. 174).

Конечно, эти свойства были и раньше по самой природе присущи упомянутым фигурам, но они все же оставались неизвестными тем, кто до нас занимался геометрией, и никому из них не пришло на ум, что все эти фигуры являются соизмеримыми друг с другом; поэтому

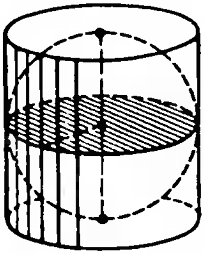


Рис. 174

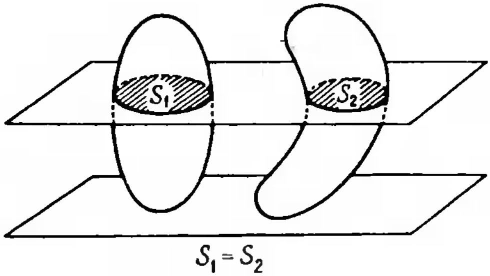


Рис. 175

я не поколебался бы сравнить эти теоремы с теми, которые были открыты другими геометрами... Теперь же их могут усмотреть все, имеющие к тому силы. Было бы очень хорошо, если бы они были обнародованы... Полагая, что было бы очень хорошо передать их сведущим в математике людям, мы посылаем тебе запись их доказательств; теперь их могут рассмотреть все занимающиеся математикой. Будь здоров!»

Итак, Архимед утверждает, что площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2, \tag{16}$$

а для шара радиуса R, вписанного в цилиндр, его объем

$$V = \frac{2}{3}(\pi R^2 \cdot 2R), \tag{17}$$

т. е. объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{18}$$

Архимед очень гордился этими открытиями, и по его воле на его могильной плите был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о том, что их объемы относятся как 3:2.

Вывод равенств (16) и (17) у Архимеда весьма сложен и занимает десятки страниц. Мы воспользуемся для вывода равенства (17) принципом, который сформулировал

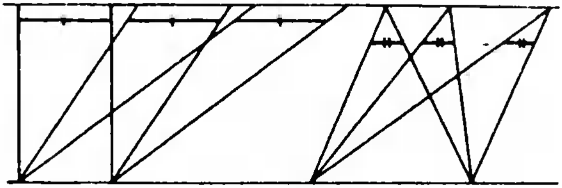


Рис. 176

в XVII в. итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598—1647). Этот принцип гласит: *если два тела могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-либо данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел равны* (рис. 175).

Основание этому принципу, как и всей теории площадей и объемов криволинейных фигур, дается в интегральном исчислении, созданном И. Ньютоном и Г. Лейбницем в конце XVII в. Методы, которые использовал Архимед для доказательства своих теорем, предвосхитили методы интегрального исчисления на 2000 лет.

Аналог принципа Кавальери для плоских фигур проиллюстрируем рис. 176, на котором изображены равновеликие треугольники и параллелограммы.

Опираясь на принцип Кавальери, можно утверждать, что объем шара радиуса R равен объему оставшейся части цилиндра C с высотой $2R$ и радиусом основания R, из которого удалили два конуса, изображенных на рис. 177. Действительно, площади заштрихованных сечений (круга и кольца), как нетрудно подсчитать, равны. Поэтому объем V шара радиуса R равен объему цилиндра без удвоенного объема конуса, т. е.

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Равенство (18) установлено.

Зная, как находится объем шара, теперь нетрудно вывести формулу (16) для площади его поверхности —

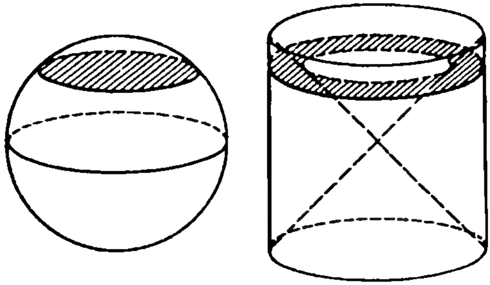


Рис. 177

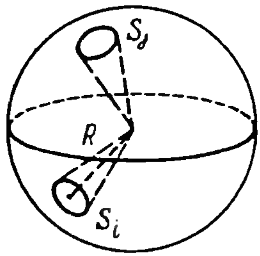


Рис. 178

сферы. Если представить себе шар радиуса R состоящим из очень тонких пирамид с общей вершиной в центре шара и с основаниями на его поверхности (рис. 178), то можно считать, что объем V шара является суммой объемов V_n этих пирамид:

$$V \approx V_1 + \ldots + V_n. \qquad (19)$$

В то же время площадь S сферы приблизительно равна сумме площадей S_n оснований пирамид:

$$S \approx S_1 + \ldots + S_n. \qquad (20)$$

Так как высоты всех пирамид приблизительно равны радиусу R, то

$$V_i = \frac{1}{3} S_i R, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (21)$$

Из равенств (19) — (21) (приблизительных, но таких, которые могут быть сколь угодно точными) следует, что

$$V = \frac{1}{3} SR. \qquad (22)$$

Так как $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, получаем: $S = 4\pi R^2$, т. е. формула (16) доказана.

Комментарий

Еще раз обратим внимание на принцип Кавальери. Представьте себе, что на плоскости стоят две призмы — прямая и наклонная, имеющие равные высоты и равновеликие основания

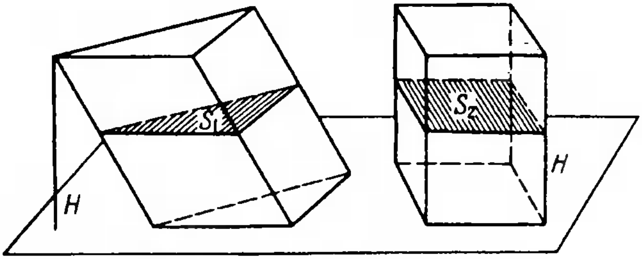


Рис. 179

(рис. 179). Ясно, что, пересекая такие призмы плоскостями, параллельными плоскости основания, мы будем каждый раз получать равновеликие сечения. Поэтому, в соответствии с принципом Кавальери, эти призмы оказываются равновеликими. Так как объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту, то и объем наклонной призмы вычисляется так же.

10.9. Архимед. Имя этого гениального греческого ученого окружено легендами, многие из которых вам, наверное, известны. И восторженное восклицание: «Эврика!» («Нашел!») ученого, решившего трудную проблему (вспомните закон Архимеда о действии выталкивающей силы на тело, погруженное в жидкость, и связанную с ним задачу о золоте в царской короне), и гордое заявление: «Дайте мне точку опоры, и я поверну Землю!» после открытия закона рычагов, и даже последние слова: «Не тронь моих чертежей!», сказанные римскому солдату, убившему его. Это отдельные, но яркие штрихи в портрете Архимеда. Конечно, наиболее полно его характеризуют написанные им работы по математике, механике, астрономии, его инженерные изобретения. Названия некоторых из его трудов показывают широту интересов Архимеда: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «Измерение круга», «О равновесии плоских фигур, или О центре тяжести плоских фигур», «О плавающих телах», «Об устройстве небесной сферы», «О многогранниках», «О построении круга, разделенного на семь равных частей» и др. О некоторых из этих работ мы уже говорили. Расскажем еще о трех.

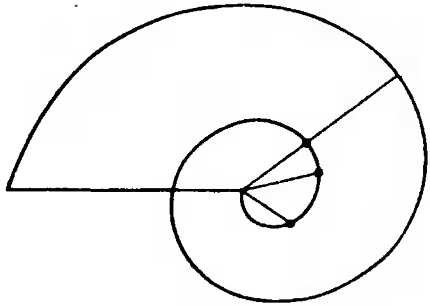


Рис. 180

В последней из названных работ речь идет о построении правильного семиугольника, которое невозможно выполнить с помощью циркуля и линейки (см. п. 9.4). Архимед строит его, привлекая другие средства.

В сочинении «О спиралях» Архимед исследует линию, которую опишет движущаяся по некоторой прямой точка, когда сама прямая равномерно вращается вокруг начального положения движущейся точки (рис. 180). Эту кривую называют спиралью Архимеда. Используя эту спираль, Архимед строит отрезок, длина которого равна длине окружности данного радиуса.

В сочинении «О многогранниках» речь идет о тринадцати выпуклых многогранниках, все грани которых — правильные многоугольники, а все многогранные углы — равны (рис. 181). Эти многогранники называют полуправильными многогранниками или архимедовыми телами. К выпуклым многогранникам, гранями которых являются правильные многоугольники и у которых одинаковые многогранные углы, кроме архимедовых тел, относятся правильные призмы и антипризмы (рис. 182), а также еще один многогранник (рис. 183), который получается из архимедова тела (см. рис. 181, *и*) при повороте на 45° девяти верхних граней. Этот многогранник был найден лишь в середине этого века, им завершился список полуправильных многогранников.

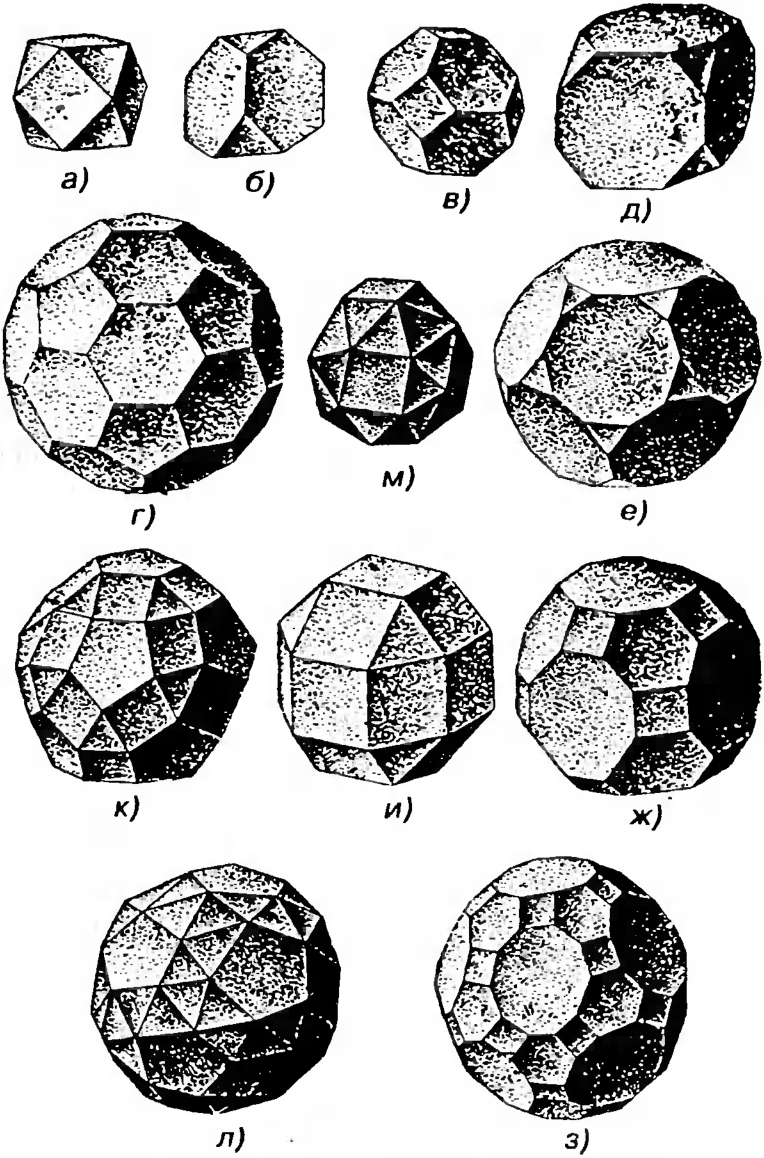


Рис. 181

Архимед жил в III в. до н. э. в городе Сиракузы на острове Сицилия, был знатным человеком, другом сиракузского царя Гиерона. Математик вел переписку, об-

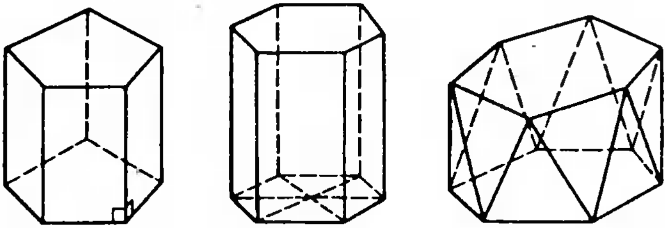


Рис. 182

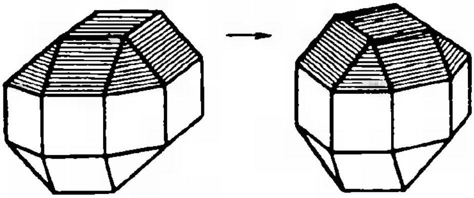


Рис. 183

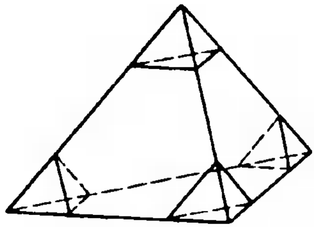


Рис. 184

суждая научные проблемы, с учеными Александрии. Но Архимеду пришлось тратить свой гений не только на решение чисто научных задач, но и для сооружения оборонительных военных орудий для защиты родного города от осаждавших его римлян. Об этих орудиях, наводивших ужас на римлян, рассказывают многие древние историки (Полибий, Тит Ливий, Плутарх). Их отзывы о самом Архимеде самые восторженные. Вот, например, слова Плутарха об Архимеде: «Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум, и, обладая громадными богатствами геометрических теорий, он не хотел оставить ни одного сочинения относительно построения тех машин, которые доставили ему славу знания, не только доступного человеку, но почти божественного... Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед». Это преклонение перед гением Архимеда сохранилось и поныне, спустя 2000 лет.

Комментарий

Вы познакомились с архимедовыми телами — полуправильными многогранниками. Подчеркнем еще раз, что в отличие от правильных, у полуправильных многогранников грани не являются одноименными правильными многоугольниками. Они могут быть шестиугольниками и треугольниками, треугольниками и квадратами, правильными десятиугольниками и правильными треугольниками и т. д. В каждой вершине таких многогранников сходится одинаковое число ребер и одинаковое число граней.

Несколько простейших полуправильных многогранников вы можете сделать сами. Возьмите любой правильный многогранник, например правильный тетраэдр. Разделите каждое его ребро на три равные части и отрежьте от каждой вершины правильный тетраэдр (рис. 184), ребро которого равно одной трети ребра данного тетраэдра. В результате вы получите полуправильный многогранник — усеченный тетраэдр.

Как сделать модели других полуправильных многогранников, вы можете прочитать в книге М. Венниджера «Модели многогранников» (М.: Мир, 1974).

10.10. Вопросы, вопросы, вопросы... Так что же такое площадь и объем? Таких вопросов не ставили ни Евклид, ни Архимед, ни другие геометры вплоть до конца XIX в. Понятия длины, площади, объема представлялись интуитивно ясными, и проблема состояла не в том, чтобы дать определение этим понятиям, а в том, чтобы **измерить** (вычислить численные значения) эти величины для конкретных фигур при выбранных единицах измерения.

Евклид даже называет равными те фигуры, которые мы теперь называем равновеликими, т. е. имеющими равную площадь. Вот примеры таких предложений из книги I «Начал»:

«Предложение 35. Параллелограммы, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными прямыми, равны между собой» (см. рис. 176).

«Предложение 37. Треугольники, находящиеся на том же основании и между теми же параллельными, равны между собой» (см. рис. 176).

В тех случаях, когда измерение площади фигуры не сводилось к построению с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данной фигуре, начиная с IV в. до н. э. греческие геометры применяли метод «исчерпывания». Этот метод, по словам Архимеда, принадлежит математику и астроному Евдоксу Книдскому (ок. 408 — ок. 355 гг. до н. э.). Хотя оригинальные сочинения Евдокса до нас не дошли, считают, что многое в «Началах» Евклида является обработкой сочинений Евдокса, например, Предложение 2 книги XII: «Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах», что в современной терминологии означает: площади кругов относятся как квадраты их диаметров.

Доказывая эту теорему, Евклид «исчерпывает» круги вписанными в них правильными n-угольниками при условии, что число их сторон неограниченно возрастает (см. рис. 162). Этим процессом, по существу, и определяется площадь круга. Можно дать такое определение: площадью $S(D)$ круга D (при выбранной единице измерения) называется такое число, которое не меньше площадей $S(P_n)$ правильных n-угольников P_n, вписанных в круг D, и такое, что разность $S(D) - S(P_n)$ может быть сколь угодно малой для достаточно больших n.

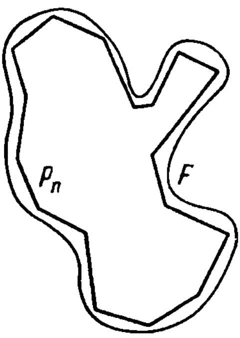


Рис. 185

Аналогично можно определить и площадь произвольной плоской фигуры F, ограниченной одной или несколькими замкнутыми линиями (рис. 185). Надо лишь правильные вписанные n-угольники заменить произвольными многоугольными фигурами P_n, содержащимися в F.

Определяя объемы различных тел, рассматривают объемы содержащихся в этих телах многогранных тел. Так мы и поступали, когда измеряли объем цилиндра, конуса и шара.

Значительно труднее определить площадь такой поверхности, которую нельзя развернуть на плоскость. Обычно такую поверхность приближают специально подобранными многогранными поверхностями, как мы и поступали, измеряя площадь сферы.

Вообще же вопросы об измерении длин, площадей и объемов относятся к трудным разделам высшей математики и излагаются достаточно строго лишь в университетских курсах.

Уточним еще одну фразу, которую мы неоднократно повторяли в этом параграфе: «сколь угодно мало». Эта фраза означает, что величина может быть и меньше 0,01, и меньше 0,001, и меньше 0,0001 и вообще меньше любого выбранного положительного числа.

ИТОГИ ГЛАВЫ 2

Главными итогами главы 2 являются формулы для определения:

длины окружности — $L = 2\pi R$;

площади круга — $S = \pi R^2$;

площади боковой поверхности цилиндра вращения — $S = 2\pi RH$;

площади боковой поверхности конуса вращения — $S = \pi Rl$;

площади сферы — $S = 4\pi R^2$;

объема цилиндра вращения — $V = \pi R^2 H$;

объема конуса вращения — $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

объема шара — $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Мы изучили взаимное расположение прямых и окружностей, углов и окружностей (§ 6), **многоугольники, вписанные в окружность и описанные около нее** (§ 8), **правильные многоугольники**

(§ 9), рассмотрели проблему квадратуры круга (п. 10.6) и задачу о построении правильного многоугольника циркулем и линейкой (п. 9.4), познакомились с «золотым сечением» (п. 9.5). Завершая изучение классической элементарной планиметрии, мы еще раз убедились в ее красоте и многообразии.

Рассказ о выпуклых фигурах (§ 7) как бы перебрасывает мост от классической элементарной геометрии в современную: теория выпуклых фигур является важным разделом современной математики (не только геометрии), имеет широкое практическое применение в экономике, а понятия опорной прямой и опорной плоскости — это геометрия XX в.

Глава 3

Преобразования

ВВЕДЕНИЕ. ДВИЖЕНИЯ И РАВЕНСТВО ФИГУР

С реальными преобразованиями фигур мы сталкиваемся постоянно: тени предметов, отражения в зеркалах, в воде, фотографии и карты, картины, вращающиеся и движущиеся предметы, предметы одинаковой формы и разных размеров — и это лишь некоторые примеры преобразования фигур (рис. 186).

Геометрические преобразования можно сравнить с числовыми функциями. Напомним, что числовая функция f каждому числу x — аргументу — из множества, на котором определена функция, ставит в соответствие другое число $f(x)$ — значение функции f для данного аргумента x. При геометрическом преобразовании f вместо числа x берется точка X из некоторой фигуры M и в соответствие ей ставится точка $f(X)$, которая называется **образом точки X при преобразовании f** (рис. 187). А множество $f(M)$ всех образов $f(X)$, когда точка X пробегает всю фигуру M, называется **образом фигуры M при преобразовании f** (рис. 188). Именно образы фигур являются главными объектами изучения в теории геометрических преобразований.

Теория геометрических преобразований — это геометрия XIX в. Знакомство с ней мы начнем с изучения

10—3086

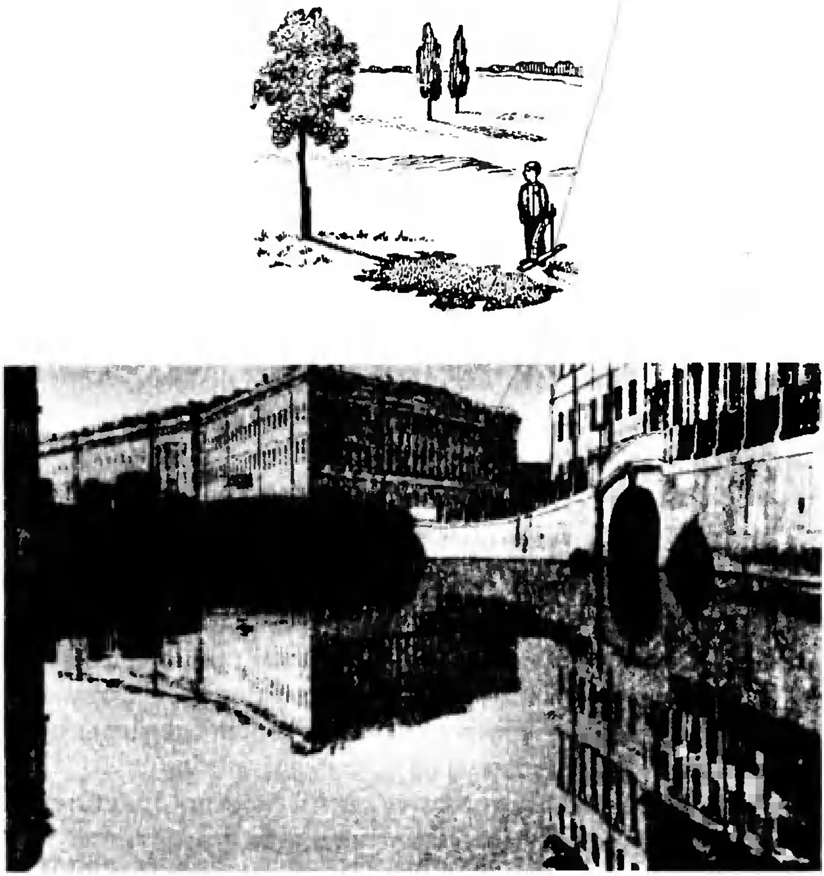


Рис. 186

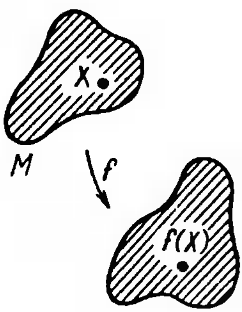


Рис. 187

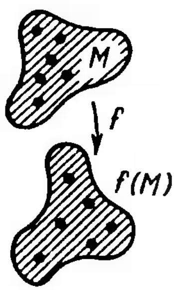


Рис. 188

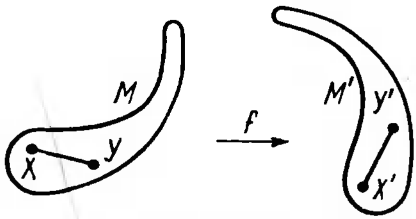


Рис. 189

важнейших геометрических преобразований — движений, т. е. тех преобразований, которые сохраняют все геометрические свойства фигур. Но, как вы уже, наверное, заметили, любое геометрическое свойство можно выразить через важнейшую геометрическую характеристику — расстояние, т. е. длины отрезков. Именно так мы определили равенство углов и треугольников, вычислили величины углов, площади и объемы. Поэтому те преобразования, которые сохраняют расстояния, сохранят и все другие свойства геометрических фигур. Такие преобразования называют **движениями**.

Итак, **движением фигуры называется такое преобразование этой фигуры, которое сохраняет расстояние между точками.**

Когда мы говорим, что преобразование f фигуры M сохраняет расстояние, мы имеем в виду, что расстояние между любыми точками X, Y фигуры M равно расстоянию между их образами $X' = f(X)$ и $Y' = f(Y)$, т. е. $XY = X'Y'$ (рис. 189).

О движениях неявно говорится в аксиоме 7 книги I «Начал» Евклида: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой». В этой аксиоме после слова «совмещающиеся» так и хочется добавить слово «движением»: ведь именно о таком преобразовании говорит Евклид. Теперь, почти повторяя Евклида, мы можем определить равенство фигур: **фигуры называются равными, если их возможно совместить движением.**

Другими словами, фигуры P и Q равны, если найдется такое движение f, что $f(P) = Q$ (рис. 190, a).

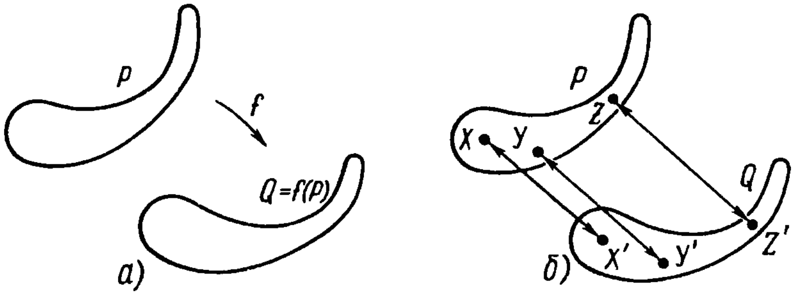


Рис. 190

Равенство фигур можно определить и не употребляя термин «движение»: *две фигуры называются равными, если между их точками можно установить соответствие, сохраняющее расстояние* (рис. 190, *б*). Но эта вторая формулировка равносильна первой, так как соответствие, сохраняющее расстояние, и означает, что каждая фигура может быть движением совмещена с другой фигурой. Эти два движения называются **взаимно обратными**.

Второе определение равенства фигур соответствует тому, как на практике сравнивают предметы. Только на практике чаще говорят не о расстояниях, а о соответствующих размерах предметов, и сами предметы называют одинаковыми (или разными, если их размеры отличаются). Например, размеры стола, двери, окна и т. п. (рис. 191). Но на практике при сравнении предметов никто не сопоставляет каждую точку одного предмета точкам другого. Сравнивают лишь те расстояния, которые играют определяющую роль, например, длины сторон и диагоналей четырехугольных предметов или диаметров круглых предметов.

Так мы и поступили, когда определили, какие треугольники называются равными. Для них определяющими размерами служат расстояния между вершинами (длины сторон). Аналогично можно было бы определить и равенство многоугольников, сказав, что многоугольники равны, когда равны их соответствующие стороны

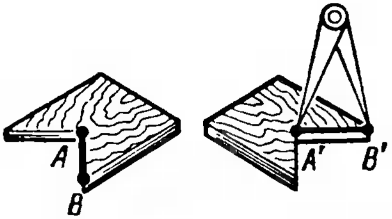


Рис. 191

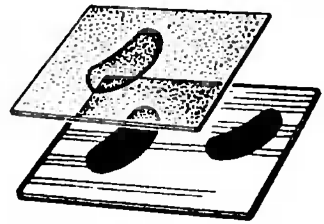


Рис. 192

и диагонали. Окружности же равны, если равны их радиусы.

Когда говорят о движении реальных тел, то представляют себе, что тело меняет свое положение в пространстве без деформаций, т. е. без изменения расстояний в нем. В геометрии движение — это отвлеченный образ реальных движений. Геометрическую фигуру нельзя передвинуть в буквальном смысле слова, как нельзя передвинуть участок земли, рисунок на бумаге и т. п. Можно передвинуть бумагу вместе с рисунком, но не рисунок на ней (рис. 192). Движение фигуры — это сопоставление ее точек другим точкам, которые и образуют образ фигуры при движении.

Видов движений немного. Мы изучим все виды движений в § 11—13, а в § 15 докажем общие теоремы о движениях и проведем классификацию движений. Здесь же мы отметим, что простейшим движением является **тождественное преобразование**, т. е. такое преобразование, которое каждую точку переводит в ту же самую точку, или, другими словами, оставляет ее на месте.

Ясно, что последовательно выполняя два или несколько движений, мы снова получаем движение (поскольку расстояние не меняется). В тех случаях, когда осуществляются последовательно два или несколько преобразований, говорят о **композиции** этих преобразований. Используя этот термин, можно сказать, что *композиция движений является движением.*

В конце главы (§ 16, 17) мы изучим подобия и инверсию.

§ 11. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

11.1 Определение параллельного переноса и его свойства. Из всех преобразований фигур самое простое — *параллельный перенос* или, короче, перенос. В механике переносу соответствует самое простое из всех реальных движений — *прямолинейное движение тела, при котором все точки тела перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние* (например, движение вагона по прямолинейным рельсам). Точно так же определяется перенос в геометрии: **параллельным переносом фигуры называется такое ее преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние** (рис. 193).

Это означает следующее: если при параллельном переносе точкам X и Y сопоставлены точки X' и Y', то направленные отрезки $\overrightarrow{XX'}$ и $\overrightarrow{YY'}$ сонаправлены и имеют равные длины, т. е. $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$.

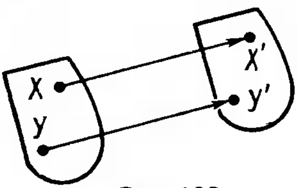


Рис. 193

Равные направленные отрезки представляют собой один и тот же вектор. Следовательно, параллельный перенос — это такое преобразование фигуры, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор — **вектор переноса**.

Основное свойство переноса. *Параллельный перенос является движением, которое сохраняет направления.*

Доказательство. Сначала убедимся, что перенос является движением, т. е. сохраняет расстояния между точками. Пусть при параллельном переносе точки X и Y перешли в точки X' и Y'. Тогда, как уже говорилось, имеет место равенство

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \qquad (1)$$

Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{XY}. \qquad (2)$$

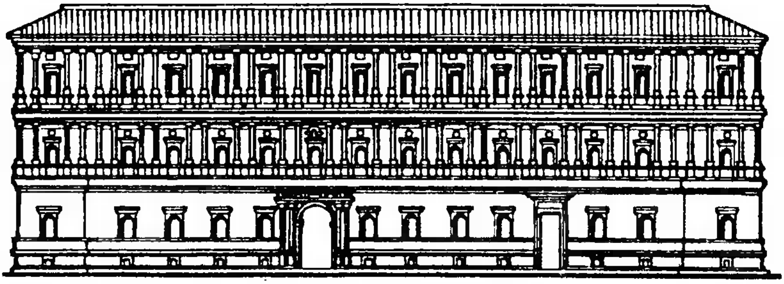


Рис. 194

Действительно, выбрав любую точку O и представив векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$ в виде разностей $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{YY'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OY}$, запишем равенство (1) в виде

$$\overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OY}. \qquad (3)$$

Равенство (3) равносильно равенству

$$\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}, \qquad (4)$$

а оно, в свою очередь, равносильно равенству (2).

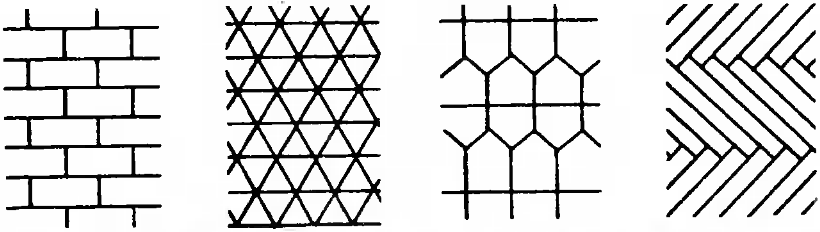
Из равенства (2) следует, что длины отрезков $X'Y'$ и XY равны, т. е. параллельный перенос является движением. Кроме того, из равенства (2) следует, что векторы $\overrightarrow{X'Y'}$ и $\overrightarrow{XY}$ сонаправлены, а это означает, что параллельный перенос сохраняет направление.

Доказанное свойство параллельного переноса является его **характерным** свойством. А именно, имеет место обратное утверждение: *движение, которое сохраняет направления, является параллельным переносом.*

Действительно, если движение сохраняет направления, то имеет место равенство (2), а из равенства (2) следует равенство (1), т. е. данное движение — перенос.

Заметим, что все сказанное о параллельном переносе относится как к фигурам на плоскости, так и к фигурам в пространстве.

Реальными примерами фигур, полученных друг из друга параллельным переносом, могут служить рисунки на тканях и обоях, одинаковые окна на фасадах домов, кресла в зрительном зале и т. п. (рис. 194).



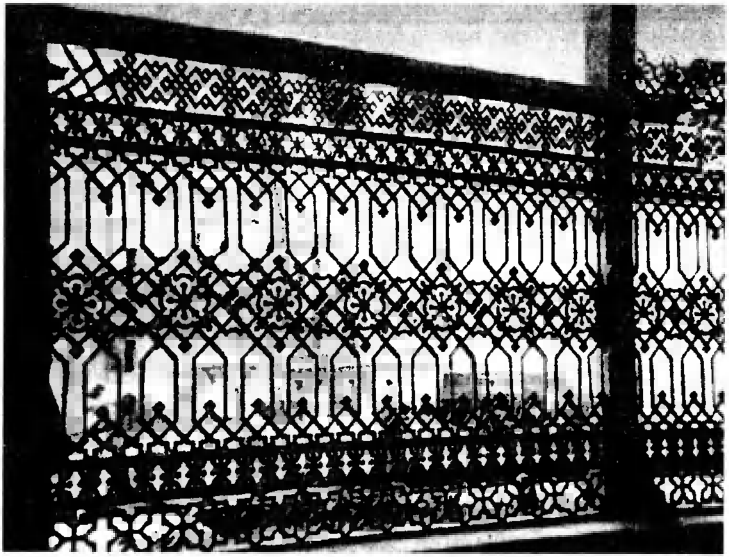


Рис. 195

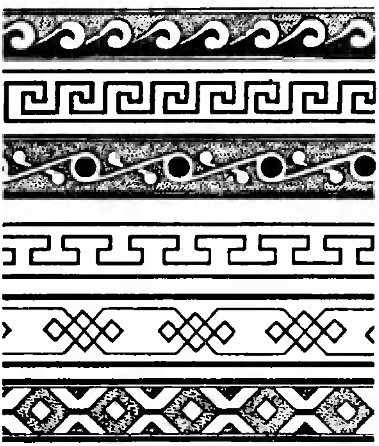


Рис. 196

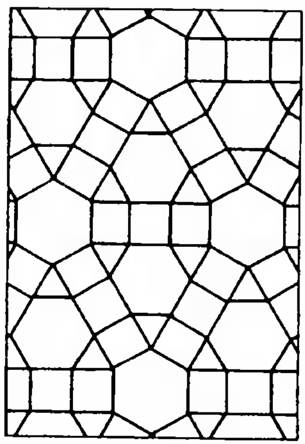


Рис. 197

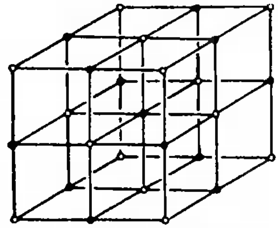


Рис. 198

11.2. Переносная симметрия. Если некоторая фигура совмещается сама с собой (самосовмещается) после параллельного переноса на некоторый вектор, то говорят, что такая фигура обладает **переносной симметрией.** Это свойство имеет, например, прямая или полоса между параллельными прямыми.

Переносной симметрией могут обладать лишь неограниченные фигуры (подумайте, почему).

Реально построить неограниченные фигуры нельзя, но можно мысленно продолжить ограниченную фигуру, «перенося» ее части, например, мы легко мысленно продолжаем рисунок на ткани или сетку клетчатой бумаги. Поэтому мы и говорим о переносной симметрии паркета, кирпичной или кафельной кладки, решетки сада или набережной и т. п. (рис. 195).

Повторяющиеся одинаковые фигуры, заполняющие на плоскости полосу между параллельными прямыми, называются **бордюрами** (рис. 196). Если же покрыта вся плоскость, то такое покрытие называется **орнаментом** (рис. 197). И бордюры, и орнаменты обладают переносной симметрией. Но в них могут быть симметрии других видов. Об этом мы расскажем позже.

Примерами пространственных фигур, обладающих переносной симметрией, могут служить кристаллические решетки (рис. 198), которые мысленно можно продолжить неограниченно.

11.3. Метод параллельного переноса. Каждое изученное нами геометрическое преобразование мы будем использовать для доказательства теорем и решения за-

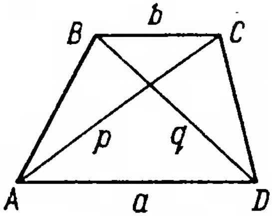


Рис. 199

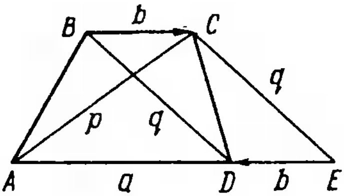


Рис. 200

дач. Выбрав подходящее преобразование, часто удается свести более трудную задачу к более простой. В этом и состоит метод преобразований. Метод параллельного переноса позволяет сблизить удаленные друг от друга части фигуры, тем самым упростив задачу. Вот примеры таких задач.

Задача 1. *Построить трапецию по ее диагоналям и основаниям.*

Решение. Допустим, нами построена трапеция $ABCD$ по основаниям $AD = a$, $BC = b$ и диагоналям $AC = p$, $BD = q$ (рис. 199). В самой трапеции заданные отрезки не образуют никакого треугольника, сторонами которого они бы являлись. Но если перенести диагональ BD на вектор $\overrightarrow{BC}$ (рис. 200), то получится треугольник ACE, у которого стороны $AC = p$, $CE = q$ и $AE = a + b$. После того как треугольник ACE будет построен по трем сторонам, на его стороне AE надо отложить отрезок $ED = b$ и осуществить параллельный перенос отрезка CE на вектор $\overrightarrow{ED}$. Выполните эти построения и подумайте, всегда ли задача имеет решение.

Задача 2. *Где следует построить мост через канал, разделяющий пункты A и B, чтобы путь $l = AP + PQ + QB$ был кратчайшим* (рис. 201, *а*). *Берега канала считаются параллельными прямыми a и b, а мост, естественно, строится перпендикулярно берегам канала.*

Решение. Заметим, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки P на прямой a, а вектор $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ определяется лишь прямыми a и b (рис. 201, *б*). Поэтому надо найти такое положение точки P, чтобы сумма

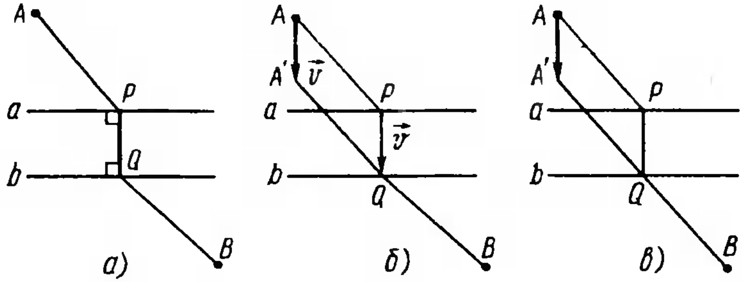


Рис. 201

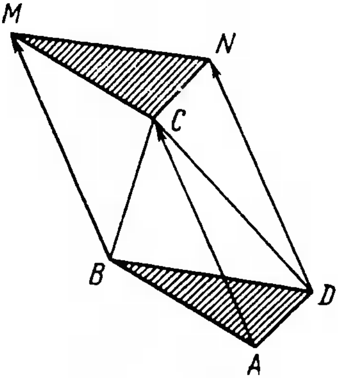


Рис. 202

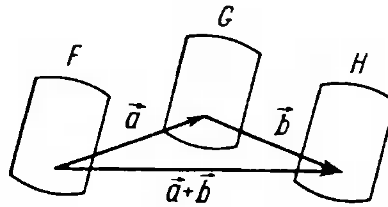


Рис. 203

$AP + QB$ была наименьшей. Так как отрезки AP и QB удалены друг от друга, переведем отрезок AP в положение $A'Q$ параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Получим ломаную $A'QB$. И теперь становится ясно, что длина ломаной $A'QB$, а значит, и длина l, будет наименьшей в том случае, когда точки A', Q, B лежат на одной прямой. Итак, Q — точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой b, а P — проекция точки Q на прямую a (рис. 201, *в*).

Укажем еще на преобразование выпуклого четырехугольника $ABCD$, которое осуществляется с помощью параллельного переноса и часто используется при решении задач о четырехугольниках. Перенесем треугольник ABD на вектор $\overrightarrow{AC}$ и получим треугольник CMN (рис. 202). Докажите, что четырехугольник $BMND$ — параллелограмм. Какие зависимости между исходным четырехугольником $ABCD$ и полученным параллелограммом $BMND$ вы можете назвать?

11.4. Группа переносов. Выполняя преобразования фигур, мы, как правило, не ограничиваемся каким-либо одним преобразованием, а чаще всего выполняем последовательно несколько преобразований или, как говорят, осуществляем **композицию** преобразований.

Если сначала переносом f на вектор $\vec{a}$ перевести фигуру F в фигуру G, а затем фигуру G перевести переносом g на вектор $\vec{b}$ в фигуру H, то в итоге мы получим перенос h фигуры F в фигуру H на вектор $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 203).

Итак, *композицией параллельных переносов является параллельный перенос на вектор, равный сумме векторов исходных переносов.*

Композицию преобразований f и g обозначают так: $g \circ f$. Порядок преобразований в их композиции существен и, вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$, т. е. *операция композиции преобразований не перестановочна*, или, другими словами, не коммутативна. Но композиции параллельных переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответствует их сумма $\vec{a}+\vec{b}$, а сложение векторов коммутативно: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Поэтому и *композиция параллельных переносов* также *коммутативна.*

Обратите внимание, что если перенос f на вектор $\vec{a}$ переводит точку X в точку X' (рис. 204, *а*), то перенос g на вектор $-\vec{a}$ возвращает точку X' в точку X (рис. 204, *б*). Поэтому композиция $g \circ f$ переносов f и g является **тождественным преобразованием**, т. е. таким преобразованием, которое каждую точку переводит в ту же самую точку, или, другими словами, оставляет ее на месте. Такие два преобразования, композиция которых является тождественным преобразованием, называются **взаимно обратными**. Значит, *переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ являются взаимно обратными* (а векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называют, напомним, противоположными).

Тождественное преобразование фигуры можно рассматривать как перенос этой фигуры на нуль-вектор. И тогда *композиция двух взаимно обратных переносов является переносом на нуль-вектор.*

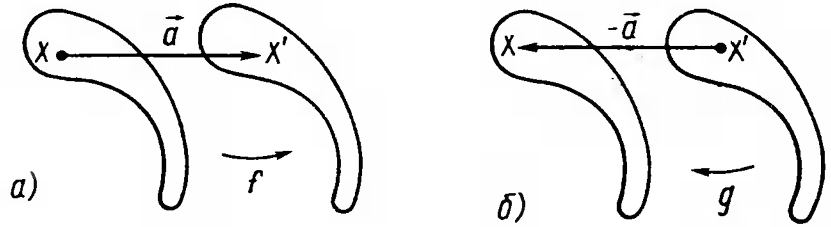


Рис. 204

Рассмотрим теперь совокупность T всех параллельных переносов плоскости (или пространства). Множество преобразований T обладает, как мы установили, следующими свойствами:

1) *композиция любых двух преобразований из* T *является также преобразованием из совокупности* T (так как композиция переносов является переносом);

2) *для каждого преобразования из* T *имеется обратное ему преобразование, также относящееся к совокупности* T (для переноса на вектор $\vec{a}$ обратным ему является перенос на вектор $-\vec{a}$).

Те множества преобразований, которые обладают сформулированными двумя свойствами, называют **группами преобразований**. Тем самым совокупность всех переносов плоскости (или пространства) является группой преобразований плоскости (пространства).

Понятие группы преобразований — одно из важнейших в современной математике. Примером служит группа переносов. Заметим, что группа переносов обладает еще одним свойством: она коммутативна.

11.5. Взаимно однозначные и обратимые преобразования. Говоря о группе переносов, мы коснулись весьма общих понятий (например, понятия обратного преобразования), о которых стоит поговорить подробнее.

Движения, которые мы сейчас изучаем, являются **взаимно однозначными преобразованиями**. Так называют такие преобразования, которые различные точки переводят в различные (рис. 205). *Движение является*

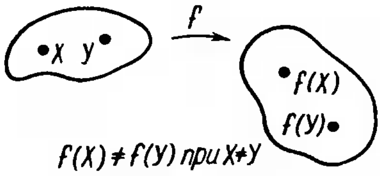


Рис. 205

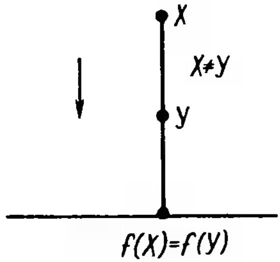


Рис. 206

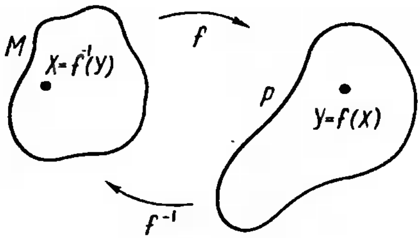


Рис. 207

взаимно однозначным преобразованием, так как для любых точек X, Y расстояние между их образами X', Y' при движении равно $|XY|$, а потому $|X'Y'| = |XY| > 0$, т. е. $X' \neq Y'$.

Не любое преобразование является взаимно однозначным. Не является взаимно однозначным, например, проектирование точек на прямую: две разные точки X и Y могут иметь одну и ту же проекцию (рис. 206).

Каждое взаимно однозначное преобразование обладает важным свойством обратимости. Оно состоит в следующем.

Пусть фигура P получена в результате взаимно однозначного преобразования f из фигуры M (рис. 207), т. е. $P = f(M)$. Тогда каждой точке X фигуры M ставится в соответствие некоторая точка $Y = f(X)$ фигуры P и любая точка Y фигуры P является образом некоторой единственной точки X фигуры M. Если теперь сопоставим каждой точке Y фигуры P ту точку X фигуры M, для которой $Y = f(X)$, то получим преобразование фигуры P в фигуру M, которое называется **обратным к преобразо-**

ванию f и обозначается f^{-1}. Очевидно, что *обратным к преобразованию* f^{-1} *является исходное преобразование* f. Поэтому говорят также, что преобразования f и f^{-1} **взаимно обратны.**

Преобразование, для которого существует обратное ему, называется **обратимым**. *Движение обратимо и обратное ему преобразование является движением.*

Действительно, если точкам X, Y при движении сопоставлены точки X', Y', то при обратном движении точкам X', Y' сопоставляются точки X, Y. Так как $|X'Y'| = |XY|$, обратное преобразование также сохраняет расстояния, т. е. является движением.

Отметим, что *композиция двух взаимно обратных преобразований является тождественным преобразованием*. Действительно, такая композиция каждую точку переводит в ту же самую точку, т. е. оставляет на месте.

§ 12. ПОВОРОТ

12.1. Определение поворота и теорема о повороте. Пожалуй, самый простой пример поворота плоской фигуры вокруг точки дают стрелки часов. Но точно определить всем ясное понятие о повороте не так просто, поэтому нам придется воспользоваться соображениями наглядности.

Пусть дана точка O. На окружности с центром O можно указать два направления обхода — по часовой стрелке и против часовой стрелки (рис. 208, *а*). Этим задаются также два направления отсчета углов от лучей, идущих из точки O,— по часовой стрелке и против нее (рис. 208, *б*).

Поворот фигуры F **вокруг центра** O **на данный угол** φ **в данном направлении** определяется так: каждой точке X фигуры F сопоставляется такая точка X', что, во-первых, $OX' = OX$, во-вторых, $\angle XOX' = \varphi$ и, в-третьих, луч OX' откладывается от луча OX в заданном направлении (рис. 209).

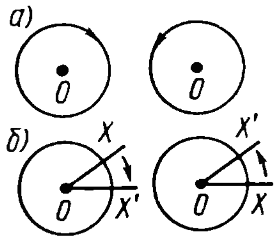


Рис. 208

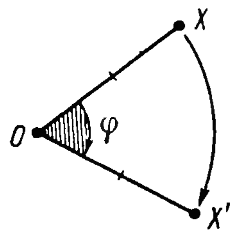


Рис. 209

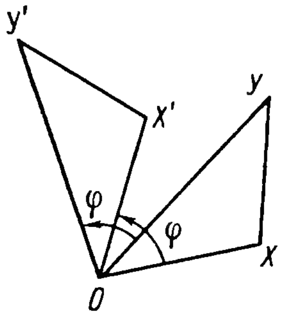


Рис. 210

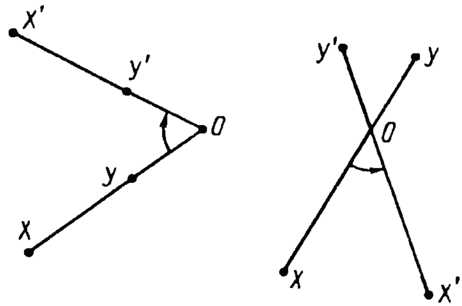


Рис. 211

Можно сказать, что все отрезки OX поворачиваются на один и тот же угол в одном и том же направлении. Если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она же сама. Точка O называется **центром поворота**, а угол φ — **углом поворота**.

ТЕОРЕМА. **Поворот является движением.**

Доказательство. Пусть при повороте вокруг точки O на угол φ точкам X и Y сопоставляются точки X' и Y'. Покажем, что $X'Y' = XY$. Рассмотрим сначала общий случай, когда точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Покажем, что

$$\angle X'OY' = \angle XOY. \qquad (1)$$

Действительно, пусть угол XOY от OX к OY отсчитывается в направлении поворота (рис. 210). (Если это не так, то рассматриваем угол YOX.) Тогда

$$\angle XOY' = \angle XOY + \angle YOY' = \angle XOY + \varphi. \qquad (2)$$

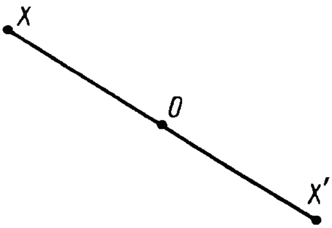


Рис. 212

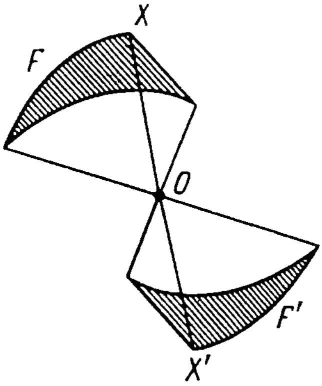


Рис. 213

С другой стороны,

$$\angle XOY' = \angle XOX' + \angle X'OY' = \varphi + \angle X'OY'. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) следует уравнение (1).

Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Они равны, так как $OX = OX'$, $OY = OY'$ и $\angle XOY = \angle X'OY'$. Следовательно, $XY = X'Y'$. Мы рассмотрели общий случай.

Если же точки O, X, Y лежат на одной прямой, отрезки XY и $X'Y'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков OX, OY и OX', OY' (рис. 211). Поэтому и в этом частном случае $XY = X'Y'$. Теорема доказана.

12.2. Центральная симметрия. Среди поворотов особый случай представляет собой поворот на 180°. Если O — центр такого поворота, то каждой точке X, отличной от точки O, поворот на 180° сопоставляет такую точку X' на прямой OX, что точка O является серединой отрезка XX' (рис. 212). О таких точках X и X' мы ранее говорили, что они **симметричны относительно точки O.**

Таким образом, поворот фигуры F вокруг точки O на 180° состоит в том, что каждой точке X фигуры F сопоставляется симметричная ей относительно точки O точка X' (рис. 213). Это преобразование называется **центральной симметрией фигуры F относительно центра O.**

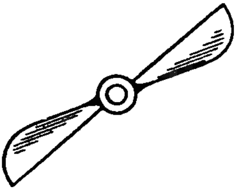


Рис. 214

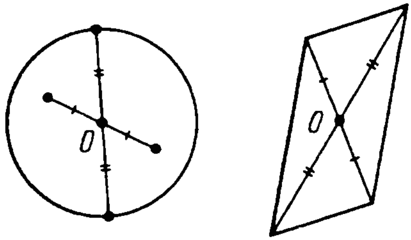


Рис. 215

Как и для осевой симметрии, симметричность точек и фигур относительно некоторой точки O взаимна: *фигуры F и F' симметричны друг другу относительно точки O.*

В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно точки O. Тогда говорят, что **фигура F симметрична относительно точки O** и что точка O является **центром симметрии фигуры F** (рис. 214). Примерами центрально симметричных фигур являются параллелограмм, окружность, круг (рис. 215).

Характерное свойство центральной симметрии формулируется так: *центральная симметрия является движением, меняющим направления на противоположные.* Докажем его.

Пусть симметрия с центром O сопоставляет точкам X, Y точки X', Y' (рис. 216). Тогда $\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}$. Поэтому

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}.$$

Следовательно любой вектор $\overrightarrow{XY}$ центральная симметрия переводит в вектор $\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}$, противоположный вектору $\overrightarrow{XY}$. Поскольку при этом $|X'Y'| = |XY|$, центральная симметрия сохраняет расстояния, т. е. является движением. Кроме того, она меняет направления векторов на противоположные.

Чтобы убедиться, что это свойство является характерным для центральной симметрии, докажем, что *движение f, меняющее направления на противоположные, является центральной симметрией.*

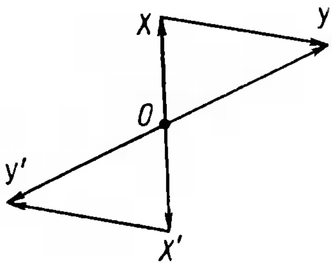


Рис. 216

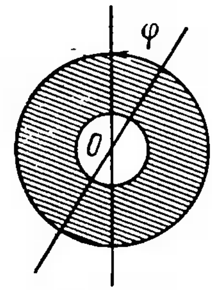


Рис. 217

Фиксируем некоторую точку A и пусть $A' = f(A)$, а точка O — середина отрезка AA', т. е.

$$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}. \qquad (4)$$

Поскольку f меняет направления на противоположные, для любой точки X и ее образа $X' = f(X)$ выполняется равенство

$$\overrightarrow{A'X'} = -\overrightarrow{AX}. \qquad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'X'} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{OX},$$

т. е. точка O — середина отрезка XX'. Следовательно, точки X и X' симметричны относительно точки O, а потому f — центральная симметрия с центром O.

12.3. Поворотная симметрия фигур. Если некоторая плоская фигура самосовмещается в результате некоторого поворота R на угол $\varphi \neq 0°$, то говорят, что такая фигура обладает **поворотной симметрией.**

Очевидно, что окружность, круг, кольцо между концентрическими окружностями обладают поворотной симметрией (с любым углом φ, рис. 217).

Правильный n-угольник самосовмещается после поворота вокруг своего центра на угол $\varphi_n = \frac{360°}{n}$ (а также на любой угол $\varphi = k\varphi_n$, где k — целое число).

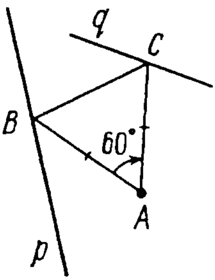


Рис. 218

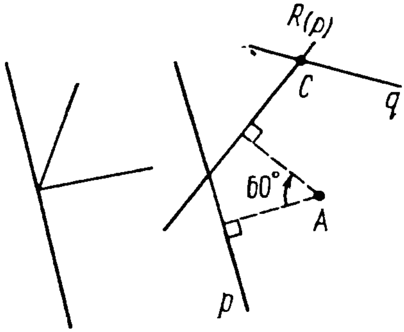


Рис. 219

Центральная симметрия на плоскости является частным случаем поворотной симметрии с углом поворота $\varphi = 180°$. Пожалуй, наиболее известная вам фигура, обладающая центральной симметрией (и никакой другой, кроме нее) — это параллелограмм.

Ограниченные фигуры имеют лишь один центр поворотной симметрии. У неограниченных фигур центров поворотной симметрии может быть много (например, у всей плоскости). Рассмотрите еще раз бордюры и орнаменты на рис. 195—197 и определите поворотные и центральные симметрии, которыми они обладают.

12.4. Метод поворота. Этим методом часто решают задачи на построение правильных многоугольников с вершинами, лежащими на данных фигурах. Вот пример такой задачи.

З а д а ч а 1. *Построить правильный треугольник, одна вершина которого лежит в данной точке A, а две другие — на данных прямых p и q* (рис. 218).

Р е ш е н и е. Если осуществить поворот с центром в точке A на угол $60°$ в направлении от AB к AC, то точка B перейдет в точку C, а прямая p в некоторую прямую p_1, проходящую через точку C (рис. 219). Следовательно, чтобы найти точку C, достаточно произвести поворот прямой p на $60°$ вокруг центра A и найти точку пересечения прямой q с образом прямой p в результате этого поворота. Сколько решений может иметь эта задача?

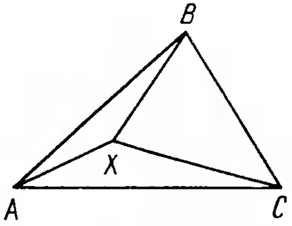


Рис. 220

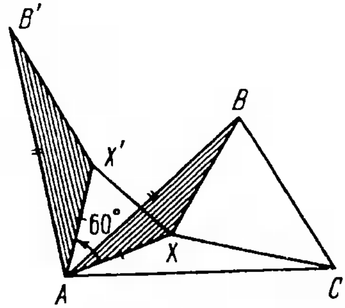


Рис. 221

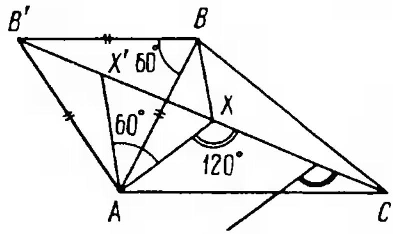


Рис. 222

А вот более сложная задача на минимум, решаемая методом поворота.

З а д а ч а 2. *В данном остроугольном треугольнике ABC найти такую точку, сумма расстояний которой до вершин треугольника минимальна* (эту точку называют **точкой Торричелли**).

Р е ш е н и е. Возьмем в треугольнике ABC любую точку X и рассмотрим сумму $d = AX + BX + CX$ (рис. 220). Чтобы найти наименьшее значение этой суммы, надо построить ломаную из отрезков AX, BX, CX. Для этого повернем $\triangle ABX$ вокруг точки A в сторону от треугольника ABC на 60°. Получим $\triangle AB'X' = \triangle ABX$. Рассмотрим ломаную $B'X'XC$ (рис. 221). В ней $B'X' = BX$ и $X'X = XA$ (так как $\triangle AXX'$ равносторонний). Следовательно, $B'X' + X'X + XC = d$. Теперь становится ясно, что d достигает своего наименьшего значения тогда, когда точки X' и X лежат на отрезке $B'C$. При этом положение точки B' определено — она вершина равностороннего треугольника ABB' (рис. 222). В этом случае углы $AX'B'$

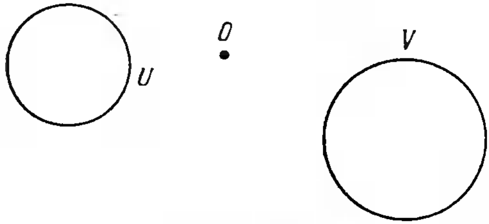


Рис. 223

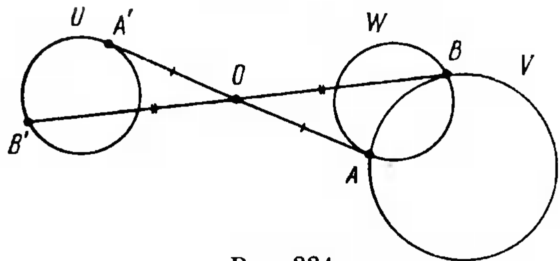


Рис. 224

и AXC — внешние углы равностороннего треугольника AXX'. Поэтому $\angle AX'B' = \angle AXC = 120°$. Так как $\angle AXB = \angle AX'B'$, то $\angle AXB = 120°$. А тогда и $\angle BXC = 120°$.

Таким образом, d достигает наименьшего значения для такой точки X, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Эту точку X легко построить на отрезке $B'C$, применив, например, параллельный перенос (см. рис. 222).

12.5. Метод центральной симметрии. Этот метод удобно применять в тех задачах, где требуется построить отрезок, делящийся в данной точке пополам. Вот пример такой задачи.

Задача. *Построить отрезок, концы которого лежат на данных окружностях U и V и серединой которого является данная точка O* (рис. 223).

Решение. Чтобы найти конец искомого отрезка на окружности V, достаточно построить окружность W, симметричную окружности U относительно точки O, а затем найти точки пересечения V и W (рис. 224). Сколько решений имеет эта задача?

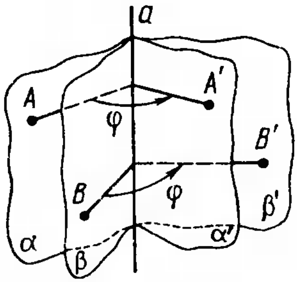


Рис. 225

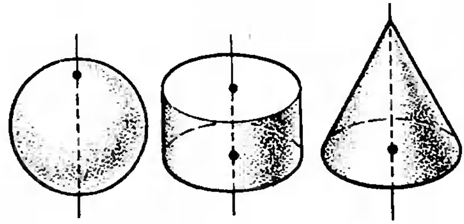


Рис. 226

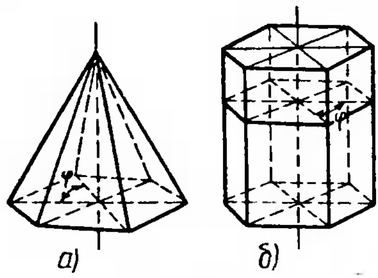


Рис. 227

12.6. Поворот в пространстве. Поворот в пространстве происходит не вокруг точки (как на плоскости), а вокруг оси, как поворот двери или колеса. Поворот в пространстве вокруг оси осуществляется в каждой плоскости, перпендикулярной оси, на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис. 225).

Поворотной симметрией в пространстве обладают рассмотренные нами в § 10 тела вращения — шар, цилиндр, конус (рис. 226). Поворотной симметрией обладают также правильные пирамиды (рис. 227, *а*) и призмы (рис. 227, *б*). Укажите оси поворотной симметрии этих тел. Попробуйте найти менее очевидные оси симметрии у некоторых из этих тел.

Как и на плоскости, поворот в пространстве на 180° приводит к одному из видов симметрии, но не к симметрии относительно точки (т. е. не к центральной симметрии), а к симметрии относительно прямой (т. е. к осевой симметрии). Действительно, при повороте на 180° в пространстве вокруг оси l каждая точка X переходит в та-

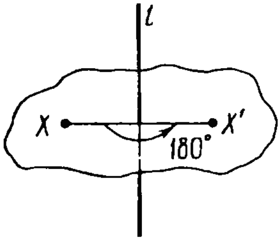


Рис. 228

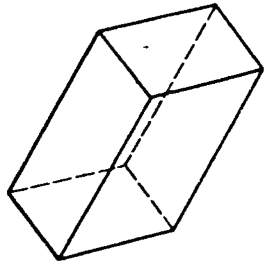


Рис. 229

кую точку X', что отрезок XX' перпендикулярен оси l и пересекает ее в своей середине (рис. 228). А это и означает, что точки X и X' симметричны относительно прямой l в пространстве.

Центральная симметрия в пространстве, хотя и определяется дословно так же, как центральная симметрия на плоскости, и имеет то же самое характерное свойство (является движением, изменяющим направления на противоположные), поворотом в пространстве не является. Убедитесь в этом, рассматривая такую центрально симметричную фигуру, как наклонный параллелепипед (рис. 229).

§ 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ

13.1. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия). Напомним, что **точки X и X' называются симметричными относительно прямой a, если a является серединным перпендикуляром отрезка XX'** (рис. 230). Каждая точка прямой a считается симметричной сама себе (относительно a). *Если прямая a задана, то каждой точке X соответствует единственная точка X', симметричная X относительно прямой a.*

Симметрией фигуры относительно прямой a (или **осевой симметрией с осью a**, или **отражением фигуры относительно прямой a**) называется такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно прямой a (рис. 231).

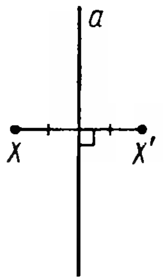


Рис. 230

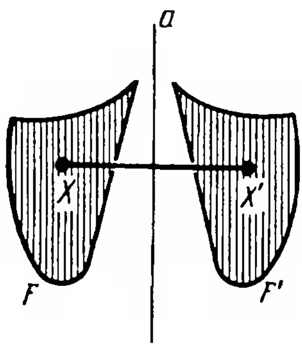


Рис. 231

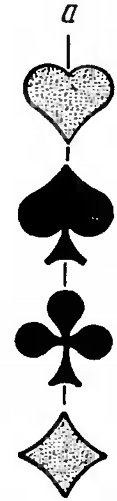


Рис. 232

Фигура F', полученная отражением фигуры F относительно прямой a, называется симметричной фигуре F относительно прямой a.

Как симметричность точек, так и симметричность фигур относительно прямой взаимна. Это означает, что *если фигура F' симметрична фигуре F относительно прямой a, то фигура F также симметрична фигуре F' относительно этой же прямой a.* Поэтому говорят, что **фигуры F и F' взаимно симметричны относительно прямой a.**

В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно некоторой прямой a (рис. 232). В этом случае говорят, что **фигура F симметрична относительно прямой a** и что прямая a является **осью симметрии фигуры F.** Исследуйте, какие из знакомых вам фигур имеют оси симметрии и укажите их.

Все сказанное в этом пункте можно отнести как к осевой симметрии на плоскости, так и к осевой симметрии в пространстве, которая, напомним, является поворотом вокруг оси симметрии на 180°. Поэтому далее мы будем говорить только об осевой симметрии на плоскости.

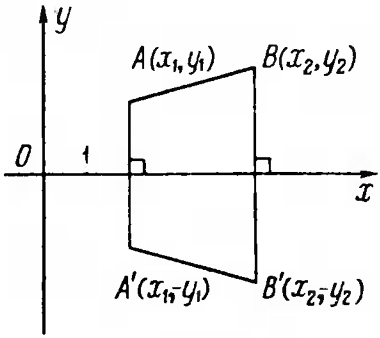


Рис. 233

13.2. Свойства осевой симметрии на плоскости. Сначала докажем, что симметрия относительно прямой на плоскости является движением.

Доказательство. Используем метод координат. Примем ось симметрии — прямую a — за ось x. Тогда симметрия относительно прямой a сопоставит каждой точке $(x,\ y)$ точку $(x,\ -y)$ (рис. 233). Возьмем любые две точки $A\ (x_1,\ y_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2)$. Симметричными им точками являются точки $A'\ (x_1,\ -y_1)$ и $B'\ (x_2,\ -y_2)$. Вычисляя расстояния $|AB|$ и $|A'B'|$, получим

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |AB|.$$

Итак, симметрия относительно прямой сохраняет расстояния, т. е. является движением.

Среди всех движений плоскости осевые симметрии выделяются тем, что *любое движение плоскости можно представить композицией не более чем трех осевых симметрий.* Можно сказать, что осевые симметрии — это те элементы, из которых строятся любые движения плоскости. Переносы и повороты таким свойством не обладают. Так, композицией любых переносов является перенос, и осевую симметрию из переносов не построишь. *Композицией двух осевых симметрий на плоскос-*

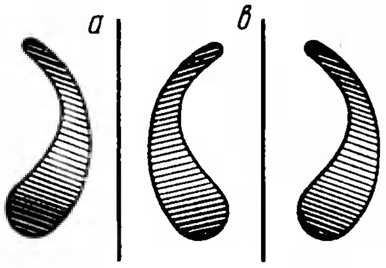


Рис. 234

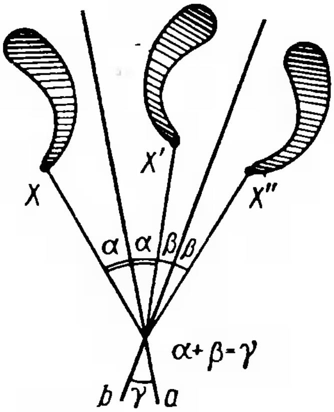


Рис. 235

ти, оси которых параллельны, является перенос (рис. 234). *Композицией двух осевых симметрий на плоскости, оси которых пересекаются, является поворот вокруг точки пересечения осей* (рис. 235).

Подумайте, как доказать эти два утверждения.

Комментарий

Теперь, когда рассмотрены частные виды движений плоскости, остановимся подробнее на отличии понятий физического и геометрического движения. В физике (да и в быту) под движением понимают *процесс* перемещения тела в пространстве. При этом в физике интересуются траекторией движения, а не только начальным и конечным положениями движущегося тела.

В понимании движения в геометрии и физике общее лишь одно: движение — это результат физического процесса. В геометрическое понятие движения входят: во-первых, начальное положение фигуры; во-вторых, ее конечное положение и, в-третьих, правило (закон), по которому для каждой точки фигуры находится ее образ (см. рис. 190).

Отметим при этом, что одно и то же движение может быть представлено разными композициями движений (как одно и то же число может быть результатом сложения различных слагаемых). Например, один и тот же перенос может быть получен как композиция двух или нескольких переносов или как композиция двух осевых симметрий (см. рис. 234).

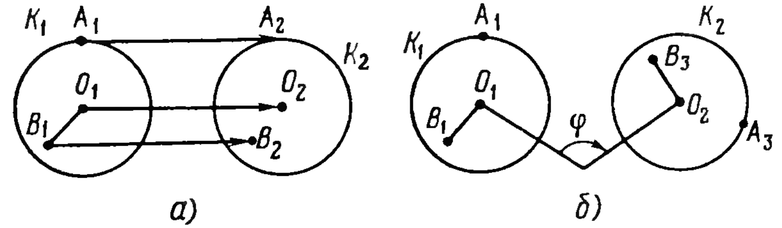


Рис. 236

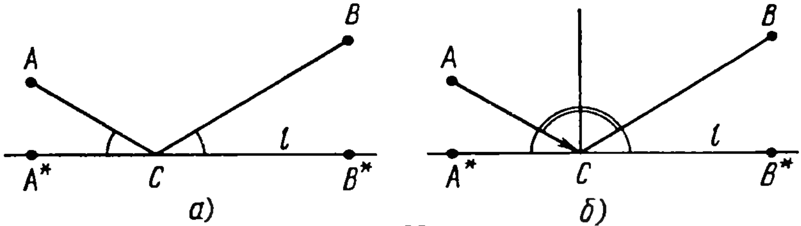


Рис. 237

На рис. 236 изображены два круга K_1 и K_2 одного радиуса. На рис. 236, *а* круг K_1 переводится в круг K_2 переносом на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$. А на рис. 236, *б* этот же круг K_1 переводится в круг K_2 поворотом вокруг точки O. Это различные движения. Укажите, какие еще движения переводят K_1 в K_2?

Сделаем еще небольшое замечание к теореме о центральной симметрии. В ней доказывается, что центральная симметрия меняет направление на противоположное. Конечно, здесь речь идет о любом направлении и точно так же, как в теореме о параллельном переносе, имеется в виду, что перенос сохраняет любое направление. Осевая симметрия, например, одно направление сохраняет и одно меняет на противоположное (какие это направления?).

13.3. Метод осевой симметрии. Осевую симметрию чаще всего используют при решении тех задач, где фигурируют биссектрисы углов или отрезки, идущие из одной точки прямой под равными к ней углами. Вот две типичные задачи, решаемые методом осевой симметрии.

Задача 1. *Две точки A и B лежат с одной стороны от прямой l* (рис. 237, *а*). *На прямой l найти такую точку C, что $\angle ACA^* = \angle BCB^*$, где A^* и B^* — проекции точек A и B на прямую l.*

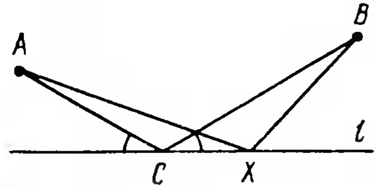


Рис 238

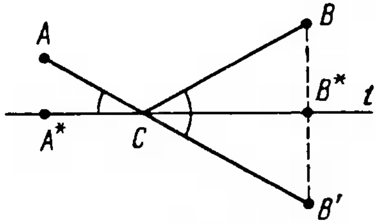


Рис. 239

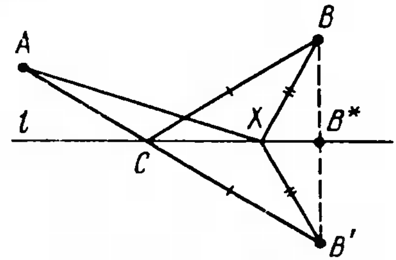


Рис. 240

Эту задачу можно сформулировать и как задачу о биллиарде: как направить шар, стоящий в точке A, чтобы, отразившись от стенки l, он попал в шар, стоящий в точке B? Можно говорить здесь и о луче света, отраженном от зеркала l и затем проходящем через точку B (ведь угол падения равен углу отражения, рис. 237, *б*). Кроме того, как станет ясно из решения задачи, длина ломаной ACB меньше длины любой другой ломаной AXB, когда точка X лежит на прямой l (рис. 238). Решается эта задача просто.

Решение. Отразим точку B относительно прямой l, т. е. построим точку B', симметричную точке B относительно прямой l (рис. 239). Точка C, в которой отрезок AB' пересекает прямую l, является искомой, так как $\angle ACA^* = \angle B'CB^* = \angle BCB^*$.

Замечание. Для любой другой точки X, лежащей на прямой l, в треугольнике AXB' сумма сторон $AX + XB'$ больше стороны $AB' = AC + CB$. Поэтому для точки C длина ломаной AXB достигает наименьшего значения, или, как говорят, минимизируется (рис. 240).

Решим методом осевой симметрии еще одну задачу на минимум.

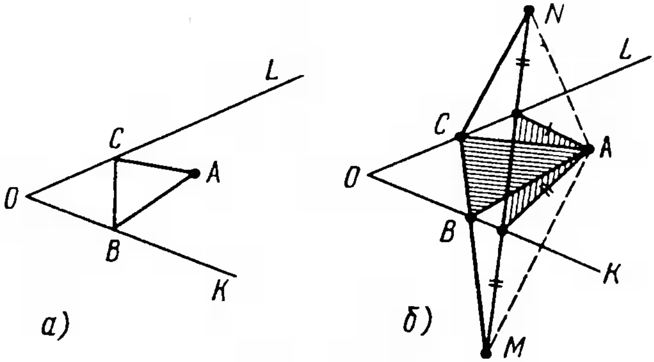


Рис. 241

З а д а ч а 2. *Внутри острого угла KOL лежит точка A* (рис. 241, *а*). *Найдите на сторонах угла такие точки B и C, чтобы периметр треугольника ABC был минимальным.*

Р е ш е н и е. Отразив точку A относительно прямых OK и OL, найдем точки M и N (рис. 241, *б*). Длина ломаной $MBCN$ равна периметру треугольника ABC. Ясно, что этот периметр будет минимальным, если точки B и C являются точками пересечения отрезка MN со сторонами OK и OL угла KOL.

13.4. Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия). Из различных видов симметрии в пространстве (относительно точки, прямой и плоскости) самой важной является симметрия относительно плоскости, или **зеркальная симметрия.** Ведь большинство предметов, созданных руками человека, обладают в основном зеркальной симметрией (рис. 242, *а, б*), да и живая природа тоже стремится чаще всего к зеркальной симметрии (рис. 242, *в, г*). Для теории геометрии важно, что *любое движение пространства может быть представлено композицией не более чем четырех зеркальных симметрий.* Поскольку любое движение плоскости можно представить композицией не более чем трех осевых симметрий, зеркальная симметрия в пространстве является аналогом осевой симметрии на плоскости.

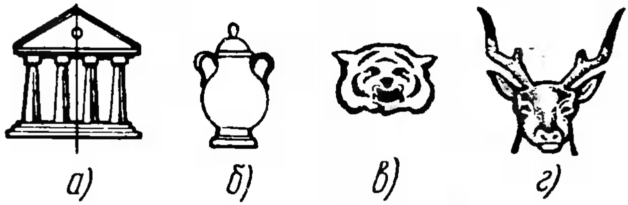


Рис. 242

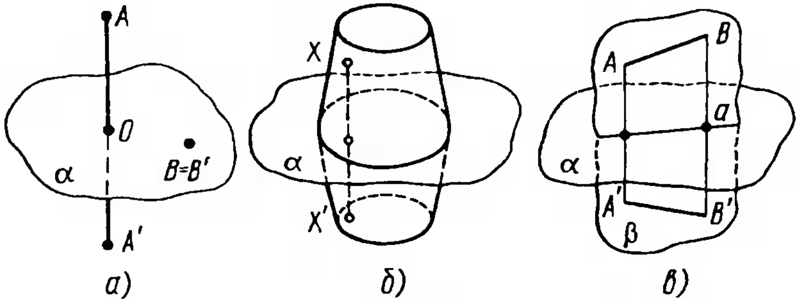


Рис. 243

Эту аналогию легко проследить, если давать все необходимые определения, связанные с зеркальной симметрией, в той же последовательности, в которой приводились определения для осевой симметрии в п. 13.1. В этих определениях следует лишь заменить прямую a плоскостью α (рис. 243). Убедитесь в этой аналогии, сравнив рис. 243, *а, б, в* с рис. 230—233. Все нужные определения сформулируйте самостоятельно. Исследуйте, какие из известных вам фигур в пространстве имеют плоскости симметрии, и укажите эти плоскости.

13.5. Скользящие симметрии и зеркальный поворот. Рассмотрим еще два вида движения, которые получаются в результате композиций переносов, поворотов и симметрий.

Скользящей симметрией на плоскости называется композиция осевой симметрии и перенос на некоторый вектор, параллельный оси симметрии (рис. 244, *а*). Легко проверить, что последовательность, в которой выполняются в этом случае симметрия и перенос, не имеет

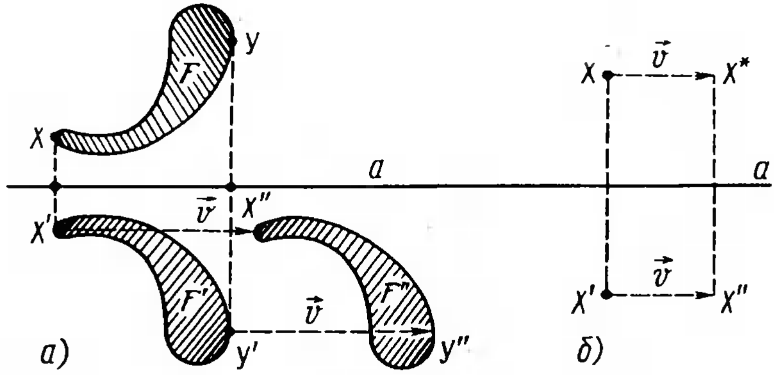


Рис. 244

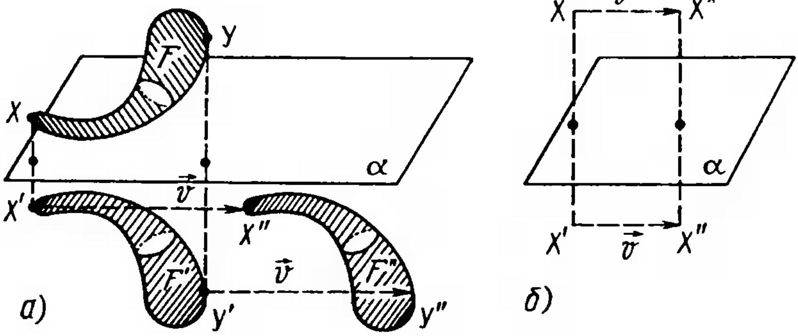


Рис. 245

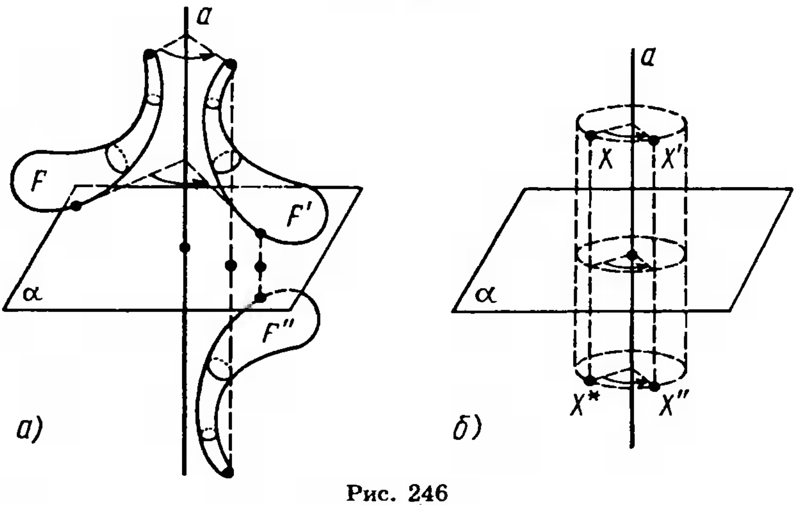


Рис. 246

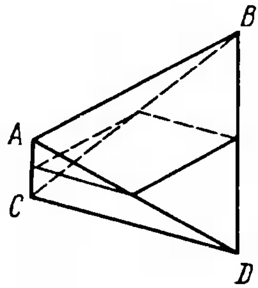


Рис. 247

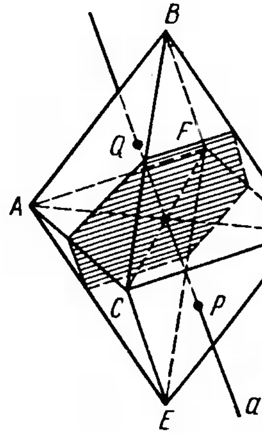


Рис. 248

значения (рис. 244, *б*), т. е. в данном случае они перестановочны.

Скользящей симметрией в пространстве называется композиция зеркальной симметрии и переноса на вектор, параллельный плоскости симметрии (рис. 245, *а*). И в этом случае симметрия и перенос перестановочны (рис. 245, *б*).

Вернитесь к бордюрам на рис. 196 и определите, какие из них самосовмещаются скользящими симметриями.

Зеркальным поворотом называется композиция поворота в пространстве вокруг некоторой оси и зеркальной симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота (рис. 246, *а*). Как и в двух предыдущих случаях, рассматриваемые здесь поворот и симметрия перестановочны (рис. 246, *б*).

Интересно, что у каждого из правильных многогранников есть зеркальные повороты, которыми эти многогранники самосовмещаются. Укажем такие зеркальные повороты для правильного тетраэдра *ABCD* (рис. 247) и правильного октаэдра *ABCDEF* (рис. 248).

Для первого из них ось одного из таких зеркальных поворотов проходит через середины ребер *AB* и *CD*, а

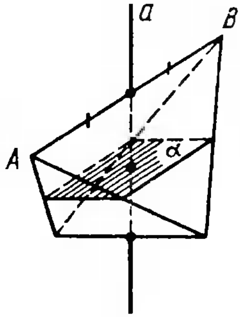


Рис. 249

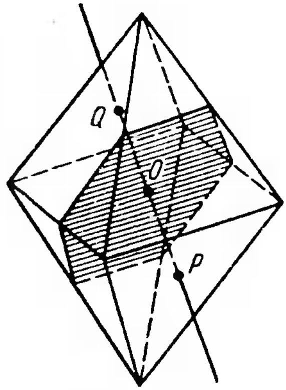


Рис. 250

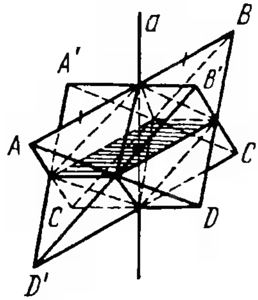


Рис. 251

плоскость симметрии через середины остальных ребер (рис. 249). Угол поворота равен 90°.

Осью зеркального поворота октаэдра служит прямая, проходящая через центры P, Q параллельных граней (рис. 250), а плоскость симметрии проходит через середину отрезка PQ. Угол поворота равен 60°.

Посмотрите, какой красивый звездчатый многогранник получился из исходного и повернутого тетраэдров (рис. 251).

§ 14. СИММЕТРИЯ ФИГУР

14.1. Элементы симметрии. О симметрии фигур мы начали говорить еще в § 5 «Геометрии-7». Напомним, что греческое слово «симметрия» означает согласованность размеров, соразмерность.

Окружающий нас мир симметричен. Об этом напоминают даже названия книг, посвященных симметрии, например, интересной книги для учащихся Л. Тарасова «Этот удивительно симметричный мир» (М.: Просвещение, 1992).

Из огромного разнообразия геометрических форм и природа, и человек обычно выбирают те, которые обладают той или иной симметрией, правильностью, уравно-

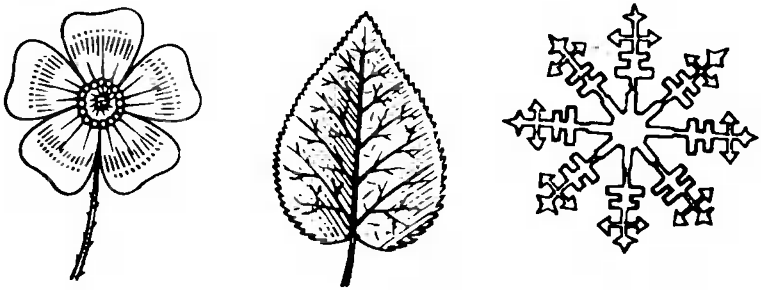


Рис. 252

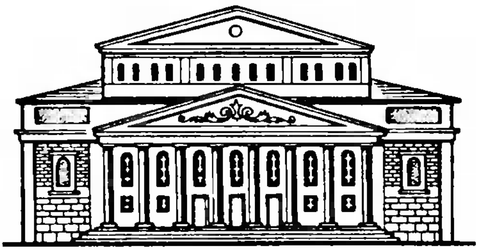


Рис. 253

вешенностью: симметрия цветов, листьев, снежинок (рис. 252), кристаллов, пчелиных сот — вот лишь немногие примеры симметрии в природе.

Симметрию мы видим не только в геометрии, но и в музыке (мелодиях и ритмах), в поэзии (рифмы и размеры стиха), физике (симметрия элементарных частиц и кристаллов) и т. п. Архитектурные сооружения, как обычные жилые дома, так и дворцы и храмы, почти всегда симметричны (рис. 253).

Симметрией фигуры называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует ее движение (нетождественное), совмещающее фигуру саму с собой. Это движение мы назовем **преобразованием симметрии данной фигуры**.

Конкретных видов движений совсем немного. В следующем параграфе будет доказано, что на плоскости — это лишь перенос, поворот, осевая и скользящая симметрии. В соответствии с этими частными видами преобра-

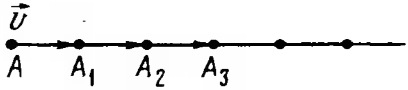


Рис. 254

зований симметрии и говорят о переносной, поворотной и осевой симметриях плоских фигур.

Аналогичная терминология вводится и для симметрии пространственных фигур — переносной, поворотной, осевой и зеркальной. Напомним, конечно, и о центральной симметрии.

Элементами симметрии фигуры называют центры, оси и плоскости одного из видов ее симметрии.

Чем богаче совокупность элементов симметрии фигуры, тем эта фигура правильнее, симметричнее. Конечно, из плоских фигур наибольшее число преобразований симметрии имеет вся плоскость, а из пространственных — все пространство: любое движение плоскости (пространства) совмещает ее (его) с собой.

14.2. Симметрия плоских ограниченных фигур. Как мы уже говорили в п. 11.2, ограниченные фигуры не обладают переносной симметрией, т. е. переносной симметрией могут обладать лишь неограниченные фигуры.

Действительно, допустим, фигура F совместилась сама с собой при переносе на вектор $\vec{v} \neq 0$. Тогда любая ее точка A перешла в такую точку A_1, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{v}$ (рис. 254). Поскольку фигура F при переносе на вектор $\vec{v}$ совместилась сама с собой, то точка A_1 — точка фигуры F. Точку A_1 перенос на вектор $\vec{v}$ также переводит в точку A_2 фигуры F такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v}$. Повторяя это рассуждение, получаем, что фигура F содержит бесконечный ряд точек A_1, A_2, ... на прямой AA_1, получаемых друг из друга переносом на вектор $\vec{v}$. Поэтому фигура F, обладающая переносной симметрией, не ограничена.

Итак, элементами симметрии ограниченной плоской фигуры могут быть центр поворота или оси симметрии. Ограниченная фигура имеет не более одного центра пово-

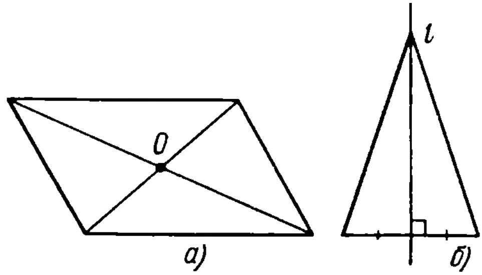


Рис. 255

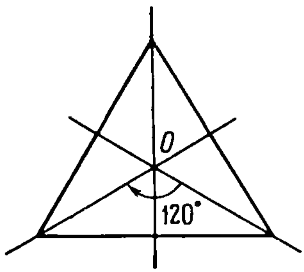


Рис. 256

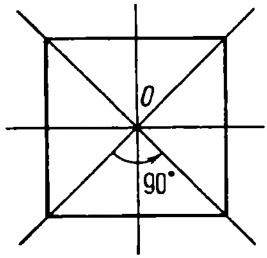


Рис. 257

ротной симметрии и может иметь более одной оси симметрии.

У фигуры может вообще не быть элементов симметрии (например, у разностороннего треугольника), может быть лишь один центр симметрии (например, у параллелограмма, отличного от ромба и прямоугольника — рис. 255, *а*), или лишь одна ось симметрии (например, у равнобедренного, но не равностороннего треугольника — рис. 255, *б*).

Больше элементов симметрии у правильных многоугольников. Так, у правильного треугольника три оси симметрии, и он обладает поворотной симметрией с углом поворота 120° (рис. 256).

У квадрата четыре оси симметрии, и он обладает поворотной симметрией с углом поворота 90° (рис. 257).

Каждый правильный n-угольник имеет n осей симметрии, все они проходят через его центр. Он имеет также поворотную симметрию с углом поворота $\frac{360°}{n}$.

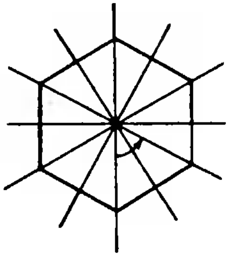


Рис. 258

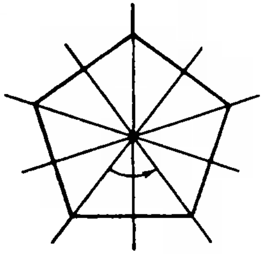


Рис. 259

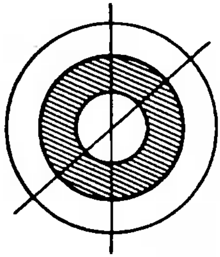


Рис. 260

При четном n одни оси симметрии проходят через противоположные вершины, другие — через середины противоположных сторон (рис. 258).

При нечетном n каждая ось симметрии правильного n-угольника проходит через вершину и середину противоположной стороны (рис. 259).

Центр правильного многоугольника с четным числом сторон является его центром симметрии. У правильного многоугольника с нечетным числом сторон центра симметрии нет.

Самой богатой симметриями ограниченной плоской фигурой является окружность, а также любая фигура, образованная семейством концентрических окружностей (в том числе и круг, рис. 260). Любая прямая, проходящая через центр этих окружностей, является осью симметрии каждой окружности, а любой поворот вокруг этого центра самосовмещает все эти окружности.

14.3. Симметрия неограниченных плоских фигур. Кроме поворотной и осевой симметрий, неограниченные плоские фигуры могут обладать еще и переносной симметрией. Такие фигуры состоят из правильно повторяющихся равных фигур. Мы уже встречались с ними в курсе «Геометрия-7», изучая в § 7 покрытия плоскости многоугольниками (рис. 261). Реальные примеры симметричных неограниченных плоских фигур дают паркеты, обои, бордюры, решетки и т. п. (см. рис. 195—197).

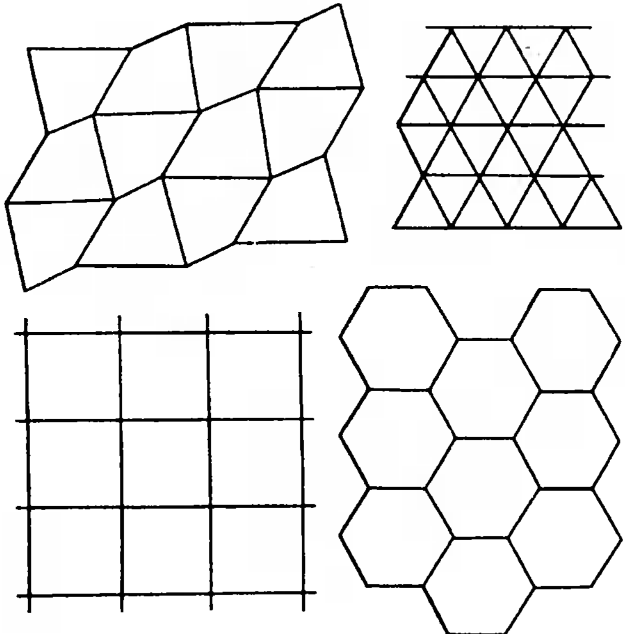


Рис. 261

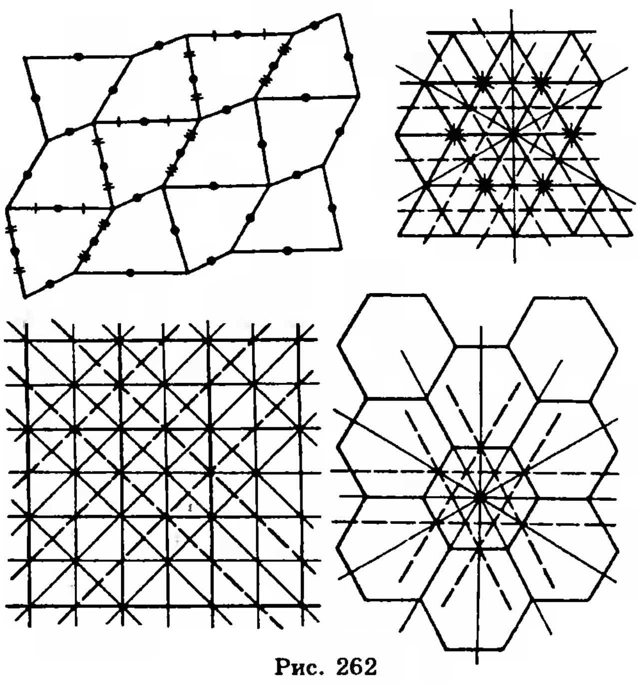


Рис. 262

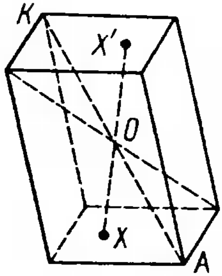


Рис. 263

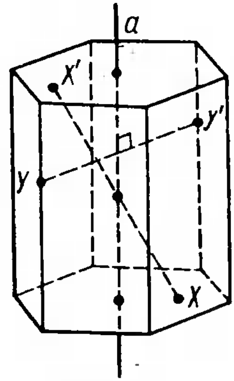


Рис. 264

Заметим, что у ограниченной фигуры может быть лишь один центр. У неограниченных фигур осей симметрии и центров поворотной симметрии может быть много (рис. 262). Эти фигуры на плоскости сами образуют правильные решетки в тех случаях, когда симметричная неограниченная фигура является бордюром или орнаментом. Бордюры и орнаменты можно классифицировать по типу симметрии. Всего существует 7 типов бордюров и 17 типов орнаментов. Интересно, что все типы бордюров и орнаментов были известны уже в глубокой древности, а их классификация дана лишь в XIX в. Еще раз рассмотрите рис. 196—197 и найдите элементы симметрии в орнаментах и бордюрах.

14.4. О симметрии пространственных фигур. Обычно мы рассматриваем тела, обладающие той или иной симметрией. Например, параллелепипед обладает центральной симметрией (рис. 263), правильные пирамиды — поворотной и зеркальной симметриями (см. рис. 227, *а*), правильные n-угольные призмы — поворотной и зеркальной симметриями (см. рис. 227, *б*), а для четного n — еще осевой и центральной симметриями (рис. 264).

Еще богаче элементами симметрии сфера, шар, цилиндр вращения, конус вращения (см. рис. 226). Укажите движения, самосовмещающие эти фигуры.

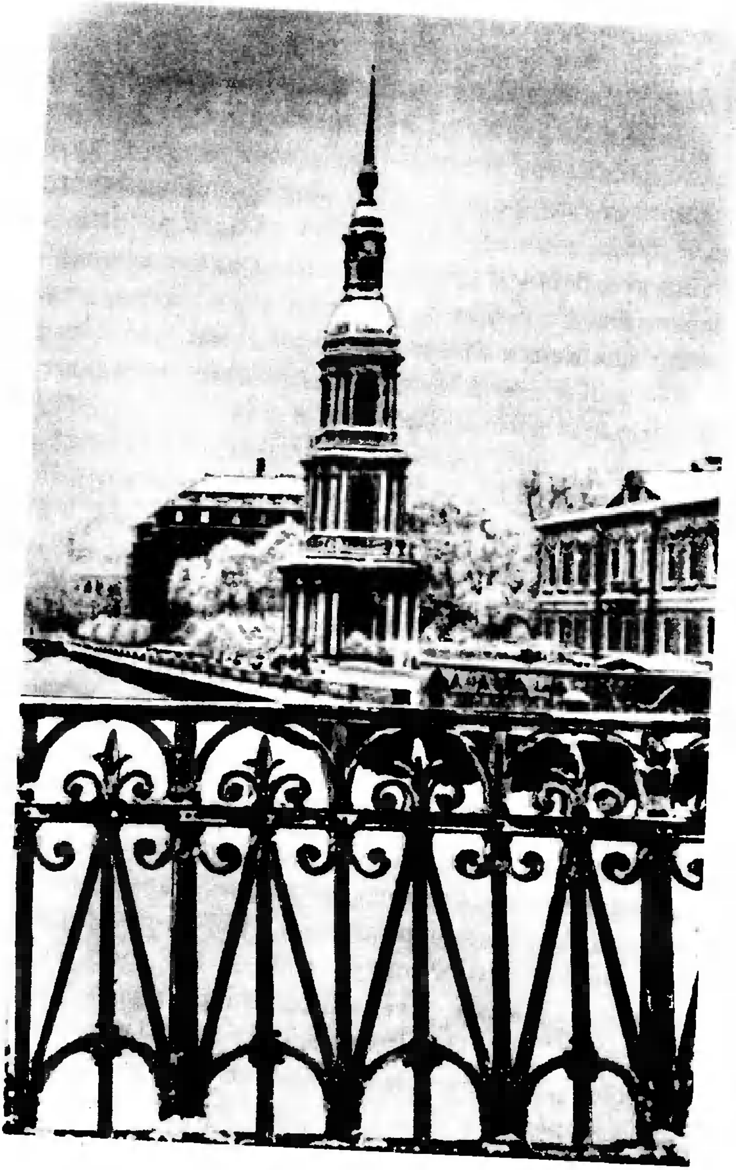


Рис. 265

Примерами неограниченных пространственных симметричных фигур являются кристаллические решетки.

На рис. 265 найдите различные виды симметрии, использованные в архитектурных сооружениях.

14.5. Симметрия правильных многогранников. Правильные многогранники являются в некотором смысле самыми симметричными среди всех многогранников. Это означает следующее. Если у правильного многогранника P взять вершину A, идущее из него ребро a и прилегающую к ребру a грань α, а затем аналогичный набор из вершины A', ребра a' и грани α', то можно самосовместить движением многогранник P так, что A перейдет в A', a — в a' и α — в α'. Этим свойством обладают только правильные многогранники.

Исследуя элементы симметрии правильных многогранников, сделайте модели таких многогранников из проволоки или бумаги.

Укажем элементы симметрии правильного тетраэдра.

Правильный тетраэдр T обладает шестью плоскостями симметрии, каждая из которых проходит через его ребро и середину противоположного ребра (рис. 266).

Правильный тетраэдр имеет четыре поворотные оси третьего порядка (т. е. осуществляется поворот на $\frac{360°}{3}$), содержащие высоты тетраэдра (рис. 267).

Три прямые, проходящие через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, являются, во-первых, его осями симметрии (рис. 268) и, во-вторых, осями его зеркального поворота на угол 90° (рис. 269).

Перейдем к кубу. Очевидно, центр куба — центр его симметрии. У куба девять плоскостей симметрии, шесть из них содержат противоположные ребра, а три проходят через середины параллельных ребер (рис. 270).

Оси симметрии куба проходят через центры противоположных граней и через середины противоположных ребер (рис. 271). Сколько их?

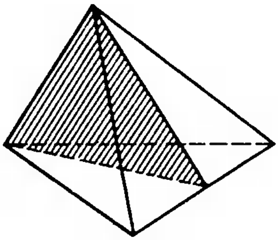


Рис. 266

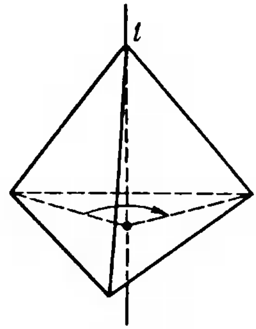


Рис. 267

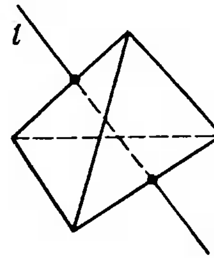


Рис. 268

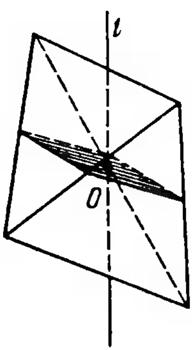


Рис. 269

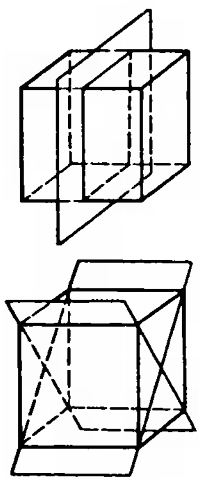


Рис. 270

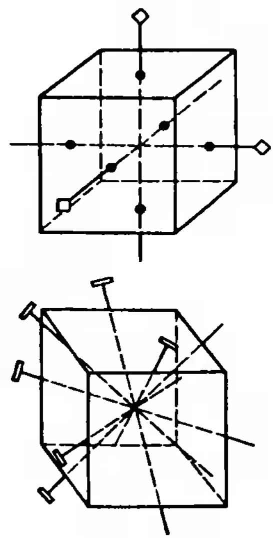


Рис. 271

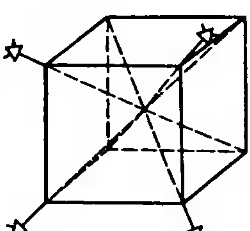


Рис. 272

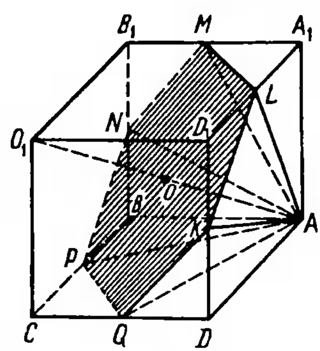


Рис. 273

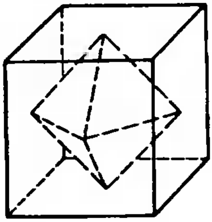


Рис. 274

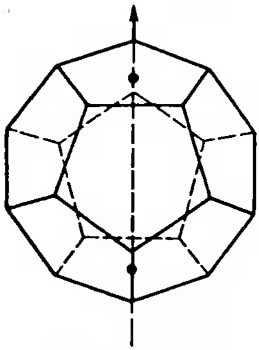


Рис. 275

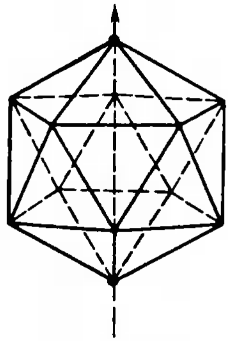


Рис. 276

Оказывается, что прямые, содержащие диагонали куба, являются осями зеркальных поворотов на 60°, самосовмещающих куб (рис. 272). Таких осей четыре. Чтобы понять, что это так, сначала построим правильный шестиугольник, образующийся в сечении куба и плоскости, проходящей через середину диагонали куба и перпендикулярной этой диагонали (рис. 273). При повороте куба вокруг этой диагонали на 60° шестиугольник самосовместится. Чтобы самосовместился и куб, надо после такого поворота произвести отражение относительно плоскости шестиугольника. В результате получится зеркальный поворот, самосовмещающий куб.

Зная элементы симметрии куба, легко найти элементы симметрии правильного октаэдра, если вспомнить, что ребра октаэдра можно построить, соединяя центры соседних граней куба (рис. 274).

Найдите самостоятельно элементы симметрии правильного октаэдра.

На рис. 275 и 276 изображены оси и плоскости зеркальных поворотов, самосовмещающих додекаэдр и икосаэдр. Найдите самостоятельно остальные (более простые) элементы симметрии этих правильных многогранников.

§ 15. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

15.1. Классификация движений на плоскости. Несмотря на кажущееся разнообразие движений на плоскости, любые две равные плоские фигуры P и Q можно преобразовать друг в друга одним из четырех движений:

1) параллельным переносом (рис. 277, *а*);

2) поворотом вокруг некоторой точки (рис. 277, *б*);

3) симметрией относительно некоторой оси (рис. 277, *в*);

4) скользящей симметрией (рис. 277, *г*).

Заметим, что осевую симметрию можно считать частным случаем скользящей симметрии, и тогда число возможных видов движений на плоскости сократится до трех.

Эту простую и исчерпывающую классификацию движений на плоскости дал в середине XIX в. французский геометр Мишель Шаль (1793—1880). Доказательство теоремы Шаля приводится в п. 15.4. Рассмотрим некоторые общие свойства движений.

15.2. Свойства движений на плоскости. Мы уже говорили, что *движения, сохраняя расстояния, сохраняют вообще все геометрические свойства фигур*, а потому, казалось бы, не стоит перечислять эти отдельные свойства. Но такое общее утверждение требует обоснования, опирающегося на определение движения. Поэтому мы наметим путь, который ведет к такому обоснованию, выделив те важнейшие свойства, из которых легко вывести и остальные свойства.

С в о й с т в о 1. *Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой. Три точки, не лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть движение переводит точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'. Тогда выполняются равенства

$$|AB| = |A'B'|, \qquad |AC| = |A'C'|, \qquad |BC| = |B'C'|. \qquad (1)$$

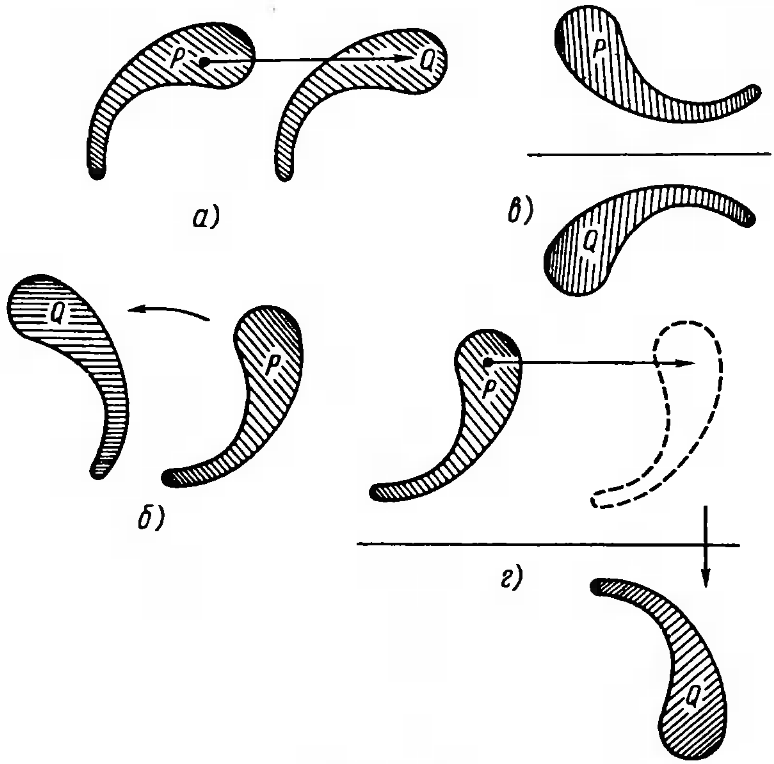


Рис. 277

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одна из них, например точка B, лежит между двумя другими. В этом случае

$$|AB| + |BC| = |AC|, \tag{2}$$

и из равенств (1) и (2) следует, что

$$|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|. \tag{3}$$

А равенство (3) означает, что точка B' лежит между точками A' и C', так как в противном случае оно не выполнялось бы, а выполнялось неравенство треугольника

$$|A'B'| + |B'C'| > |A'C'|. \tag{4}$$

Первое утверждение доказано. Второе утверждение докажите самостоятельно (способом «от противного»).

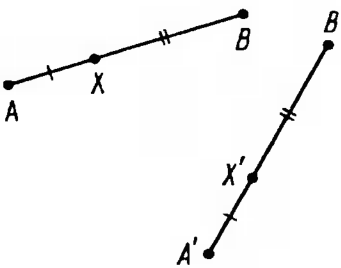


Рис. 278

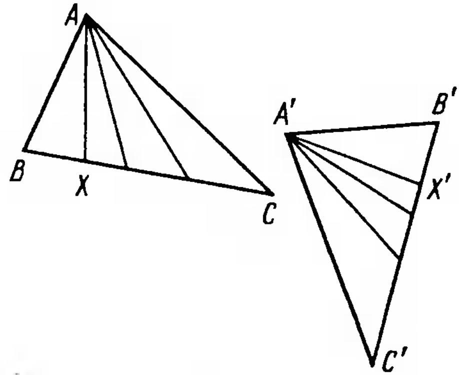


Рис. 279

Отметим, что, доказывая свойство 1, мы установили, что *при движении точка, лежащая между двумя другими, переходит в точку, лежащую между образами этих двух точек.*

Доказав достаточно подробно первое свойство, мы будем лишь пояснять остальные свойства, не приводя подробных доказательств.

Свойство 2. *Отрезок движением переводится в отрезок.*

Действительно, пусть движение переводит концы A, B отрезка AB в точки A', B' (рис. 278). Когда точка X пробегает отрезок AB от A к B, ее образ X' пробегает отрезок $A'B'$ от A' к B'.

Свойство 3. *Треугольник движением переводится в треугольник.*

Действительно, треугольник ABC заполняется отрезками, соединяющими вершину A с точками X противоположной стороны BC (рис. 279). Движение сопоставит отрезку BC некоторый отрезок $B'C'$ и точке A — точку A', не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку AX это движение сопоставит отрезок $A'X'$, на котором точка X' лежит на $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$. В него и переходит треугольник ABC.

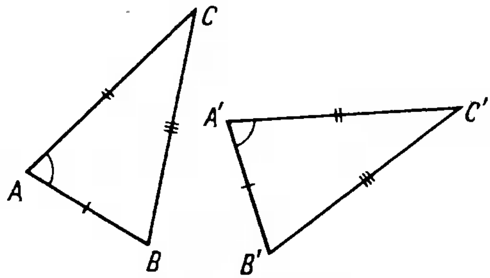


Рис. 280

Свойство 4. *Движение сохраняет величины углов.*

Действительно, если точкам A, B, C, не лежащим на одной прямой, движение сопоставляет точки A', B', C', то в силу равенств (1) $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Поэтому $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (рис. 280).

Итак, *движение сохраняет углы, а значит и перпендикулярность.* Поэтому *высота треугольника движением переводится в высоту треугольника-образа.* Длины высот и сторон треугольника при движении сохраняются. Поэтому движение сохраняет площадь треугольника.

Многоугольные фигуры составляются из треугольников. Поэтому справедливо следующее свойство.

Свойство 5. *При движении сохраняются площади многоугольных фигур.*

15.3. Неподвижные точки движений на плоскости. Начиная с этого пункта и до конца параграфа, мы рассматриваем движения всей плоскости, потому словом «движение» будем обозначать движение плоскости.

Изученные нами виды движений различаются множеством своих неподвижных точек. Вообще точка A называется **неподвижной точкой преобразования f**, если это преобразование оставляет точку «на месте», т. е. $f(A) = A$.

Самое богатое множество неподвижных точек у тождественного преобразования — все его точки неподвижны. У осевой симметрии неподвижными являются только точки оси симметрии. Поворот имеет единственную неподвижную точку — центр симметрии. У параллельного переноса (отличного от тождественного) неподвижных точек нет.

Перечисленные нами случаи видов множеств, состоящих из неподвижных точек движений плоскости, исчерпывают все возможные виды. Докажем это, воспользовавшись следующей важной леммой.

ЛЕММА. **Если две точки A и B являются неподвижными точками движения f, то все точки прямой AB являются неподвижными точками этого движения f.**

Действительно, пусть точка C лежит на прямой AB. Тогда (по свойству 1 п. 15.2) ее образ $C' = f(C)$ лежит на прямой AB. Кроме того, $AC' = AC$ и $BC' = BC$. Но эти равенства возможны лишь в том случае, когда $C' = C$, т. е. когда $f(C) = C$.

Теперь, перечисляя все логически возможные случаи, мы приходим к такой классификации неподвижных точек движений плоскости:

1) Множество неподвижных точек пусто. Пример — параллельный перенос.

2) Имеется единственная неподвижная точка. Примером такого движения является поворот, и, как станет ясно из теоремы Шаля, других движений, имеющих единственную неподвижную точку, на плоскости нет.

3) Имеются две неподвижные точки A и B. Тогда вся прямая AB состоит из неподвижных точек. Если кроме этих неподвижных точек, у движения других неподвижных точек нет, то оно является симметрией относительно прямой AB. Действительно, возьмем любую точку X и опустим из нее перпендикуляр XC на прямую AB (рис. 281). Движение переведет его в перпендикуляр CX' к прямой AB, лежащий по другую сторону от AB. Поэтому точки X и X' симметричны относительно прямой AB, т. е. рассматриваемое движение — осевая симметрия с осью AB.

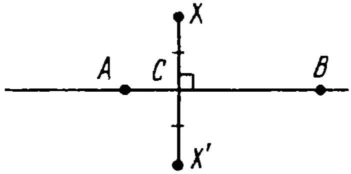


Рис. 281

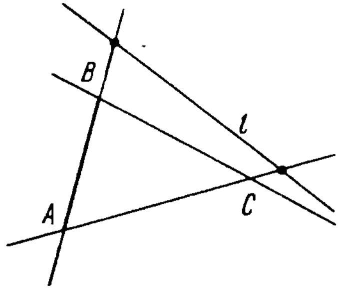


Рис. 282

4) Имеются три неподвижные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой (рис. 282). Тогда все точки плоскости окажутся неподвижными, а потому рассматриваемое движение — тождественное.

Чтобы убедиться в этом, достаточно сначала заметить, что все точки прямых AB, AC, BC неподвижны. А так как любая прямая пересекает по крайней мере две из трех прямых AB, AC, BC, то и все точки на любой другой прямой — неподвижны, т. е. все точки плоскости — неподвижны.

15.4. Основные теоремы о движениях плоскости. Сначала мы ответим на вопрос: сколько пар соответствующих точек необходимо задать, чтобы однозначно определить движение плоскости? Оказывается, достаточно трех пар точек, т. е. двух треугольников. Об этом и говорится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. **Пусть на плоскости заданы два равных треугольника ABC и $A'B'C'$, причем $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Тогда существует единственное движение плоскости, которое переводит точку A в A', точку B в B', точку C в C'.**

Доказательство. Существование такого движения достаточно очевидно. Сначала следует произвести перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$ (рис. 283, *а*), затем поворот на угол $B_1A'B'$ (рис. 283, *б*). Эти перенос и поворот совместят стороны AB и $A'B'$ треугольников ABC и $A'B'C'$. Если

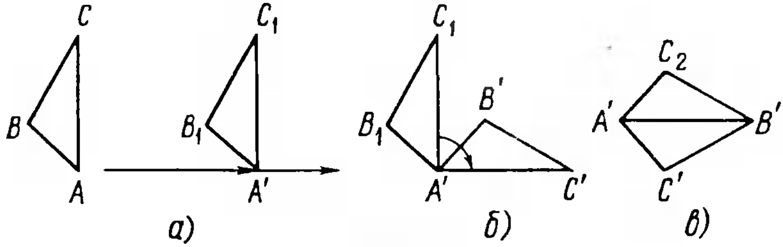


Рис. 283

треугольник ABC после этих преобразований не совместится с треугольником $A'B'C'$, то следует выполнить симметрию относительно прямой $A'B'$. Этим завершается преобразование треугольника ABC в треугольник $A'B'C'$ (рис. 283, *в*).

Докажем единственность построенного движения. Пусть f и g — два движения плоскости, переводящие точку A в A', точку B в B' и точку C в C'. Возьмем любую точку X и покажем, что $f(X) = g(X)$. Этим мы и докажем, что f и g совпадают, т. е. рассматриваемое движение — единственное.

Допустим, что точки $X_1 = f(X)$ и $X_2 = g(X)$ различны. Так как f и g движения, то $A'X_1 = AX$ и $A'X_2 = AX$. Поэтому $A'X_1 = A'X_2$, т. е. точка A' равноудалена от точек X_1 и X_2 (рис. 284). А тогда точка A' лежит на серединном перпендикуляре отрезка X_1X_2 — прямой l. Точно так же можно доказать, что и точки B', C' лежат на серединном перпендикуляре отрезка X_1X_2. Но это противоречит тому, что точки A', B', C' не лежат на одной прямой. Следовательно, $f(X) = g(X)$, т. е. f и g совпадают.

Теперь мы можем доказать теорему Шаля.

ТЕОРЕМА. **Каждое движение плоскости является либо переносом, либо поворотом, либо скользящим отражением, т. е. композицией осевой симметрии и переноса в направлении оси симметрии.**

Замечание. Осевую симметрию мы считаем частным случаем скользящей симметрии, а тождественное преобразование — частным случаем переноса.

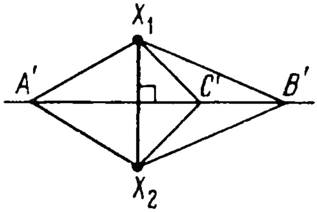


Рис. 284

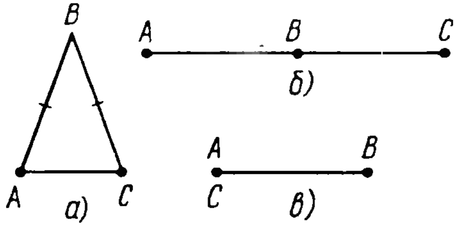


Рис. 285

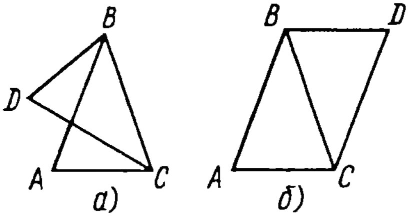


Рис. 286

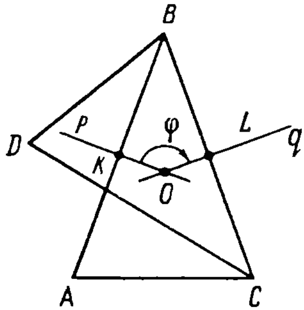


Рис. 287

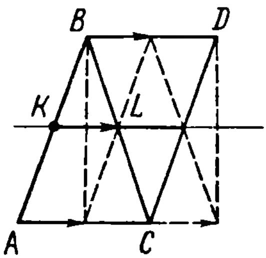


Рис. 288

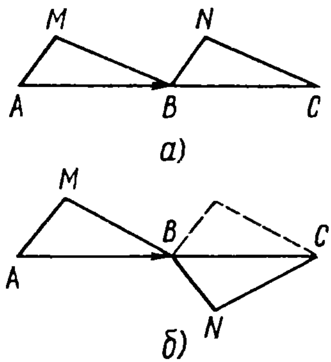


Рис. 289

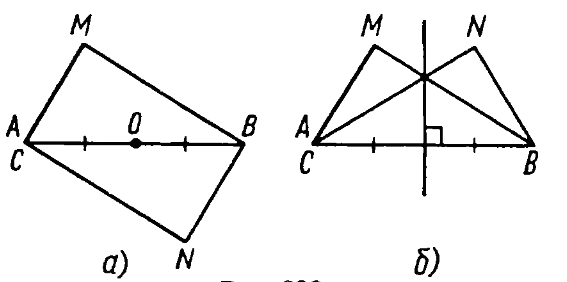


Рис. 290

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда движение плоскости f не тождественное. Возьмем тогда произвольную точку A, образ которой — точка $B = f(A)$ — отличен от A. Далее положим $C = f(B)$. Поскольку f — движение, то $AB = BC$.

Для отрезков AB и BC возможно три случая их взаимного расположения.

1) Точка B — вершина равнобедренного треугольника ABC (рис. 285, *а*). Если ABC — треугольник, то положим $D = f(C)$. Тогда движение f переводит треугольник ABC в треугольник BCD. Возможны два случая их взаимного расположения. Пусть точка K — середина отрезка AB, а точка L — середина отрезка BC. В случае, соответствующем рис. 286, *а*, проводим серединные перпендикуляры p и q отрезков AB и BC. Они пересекутся в некоторой точке O (рис. 287). Поворот вокруг точки O на угол $\varphi = \angle KOL$ совместит $\triangle ABC$ с $\triangle BCD$. Поэтому согласно предыдущей теореме f — поворот.

Для случая, соответствующего рис. 286, *б*, треугольник ABC переводит в треугольник BCD скользящее отражение, которое является композицией переноса на вектор $\overrightarrow{KL}$ и симметрии относительно прямой KL (рис. 288). При этом f является этим скользящим отражением.

2) Точка B — середина отрезка AC (см. рис. 285, *б*). Пусть B — середина отрезка AC. Возьмем любую точку M вне прямой AC, и пусть $N = f(M)$. Тогда движение f переводит $\triangle ABM$ в $\triangle BCN$. Возможны два варианта их расположения: движение f — перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 289, *а*), движение f — скользящее отражение с вектором переноса $\overrightarrow{AB}$ и осью симметрии AB (рис. 289, *б*).

Подробные рассуждения проведите самостоятельно.

3) Точки A и C совпадают (см. рис. 285, *в*). Если $C = A$, то, как и во втором случае, рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle BCN$. Здесь также возможны два варианта их расположения: f — поворот вокруг точки O — середины отрезка AB — на 180°, т. е. симметрия относительно точки O

(рис. 290, *а*), и симметрия относительно серединного перпендикуляра отрезка AB (рис. 290, *б*).

Теорема Шаля доказана полностью.

Комментарий

В теореме о задании движения мы доказывали совпадение двух движений f и g. Так как в геометрии движение фигуры — это отображение одной фигуры на другую, т. е. соответствие между элементами этих фигур, то в нашем случае, когда речь идет об отображении плоскости в себя, для того, чтобы доказать, что движения f и g совпадают, необходимо доказать, что для любой точки плоскости совпадают ее образы $f(X)$ и $g(X)$.

15.5. Вопросы, вопросы, вопросы... о движениях и равенстве фигур. Общее понятие о равенстве фигур (фигуры равны, если их можно совместить движениями) было дано нами во введении к главе 3, а понятие о равенстве отрезков, углов и треугольников — еще в «Геометрии-7». Причем понятие о равенстве отрезков выведено аксиоматически, а равенства углов и треугольников определялись через равенство отрезков. Естественно спросить, не войдет ли общее понятие о равенстве фигур в противоречие с ранее введенными понятиями о равенстве отрезков, углов и треугольников? Покажем, что этого не произойдет.

Действительно, как следует из теоремы о задании движения (п. 15.4) и из общих свойств движений (п. 15.2), любые равные отрезки, углы и треугольники можно совместить движениями. Поэтому они являются равными фигурами в смысле общего определения равенства фигур.

Отметим еще, что теорема о задании движения позволяет распространить любое движение, заданное на некоторой плоской фигуре M, на всю плоскость. Это означает следующее. Если f — некоторое движение фигуры M, то найдется такое движение g всей плоскости, которое на всех точках фигуры M будет совпадать с f, т. е. $f(X) = g(X)$ для любой точки X фигуры M. Поэтому, хотя реальные движения происходят с ограниченными фигурами, в теории всегда удобнее рассматривать движения всей плоскости, как мы и делали в последних пунктах этого параграфа.

15.6. Два рода движений. Ориентация. Вернемся еще раз к рис. 277, с которого мы начали этот параграф. Представим себе, что в плоскости этого рисунка живут существа, не имеющие никакого понятия об окружающем пространстве. Они измерили фигуры P и Q (во всех четырех случаях) и установили, что эти фигуры равны. Затем они попытались совместить эти фигуры, непрерывно перемещая их в плоскости рисунка. В первых двух случаях (см. рис. 277, *а, б*) это у них легко получилось, а в двух остальных (см. рис. 277, *в, г*) — нет.

Такие трудности, наверное, испытывали и вы, когда, например, пробовали аккуратно сложить два одинаковых лекала или чертежных треугольника. Иногда, чтобы они совместились, приходилось один из них перевернуть (рис. 291). Так что же, фигуры P и Q (см. рис. 277, *в*) не равны? Ведь есть же движение (осевая симметрия), которое их совмещает. Но это движение отличается от переноса и поворота тем, что его нельзя реализовать непрерывным перемещением фигур, не выходя из плоскости, в то время как для переноса и поворота это возможно.

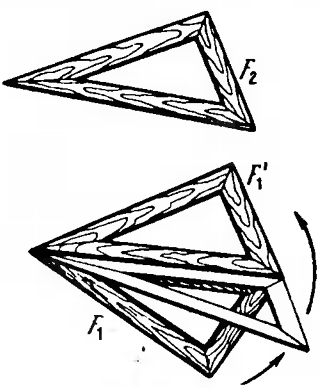


Рис. 291

Перенос и поворот называют **движениями первого рода**, а скользящую симметрию (в частности и осевую симметрию) на плоскости называют **движением второго рода**.

Движения первого рода сохраняют **ориентацию**, а движения второго рода меняют ориентацию на противоположную. Что же такое ориентация на плоскости?

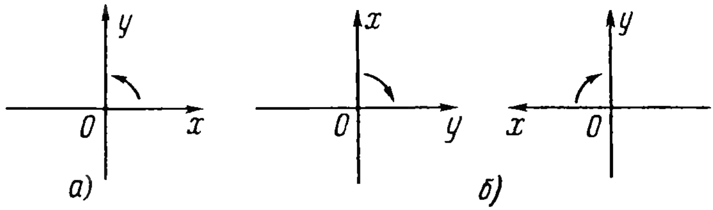


Рис. 292

На плоскости имеются два направления поворота: против часовой стрелки и по часовой стрелке (см. рис. 208). Те системы координат, в которых кратчайший поворот полуоси $x \geqslant 0$ в полуось $y \geqslant 0$ идет против часовой стрелки, называют обычно **правыми системами** (рис. 292, *а*). Если же поворот идет по часовой стрелке, то систему называют **левой** (рис. 292, *б*).

Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то говорят, что **плоскость ориентирована** или что на плоскости задана ориентация. Ориентации плоскости считаются одинаковыми, если они имеют одноименные системы координат. Разноименные системы координат задают различные ориентации плоскости. Следовательно, на плоскости можно задать две ориентации. Их, как и координатные системы, называют правой и левой (или положительной и отрицательной).

Движения первого рода сохраняют ориентацию плоскости (т. е. правые системы координат переводят в правые, а левые — в левые). *Движения второго рода меняют ориентацию на противоположную.*

Поэтому *композиция любого числа движений первого рода является снова движением первого рода.* Следовательно, осевую симметрию нельзя получить как композицию поворотов и переносов.

Если дважды выполнить движение второго рода, то ориентация дважды изменится, а потому в итоге сохранится. Следовательно, *композиция двух (или вообще четного числа) движений второго рода является движением первого рода.* Как представить перенос f на вектор $\vec{v}$ и поворот K на угол φ композициями осевых симмет-

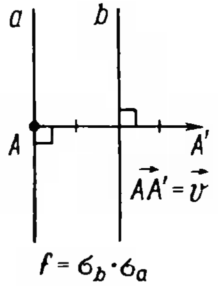


Рис. 293

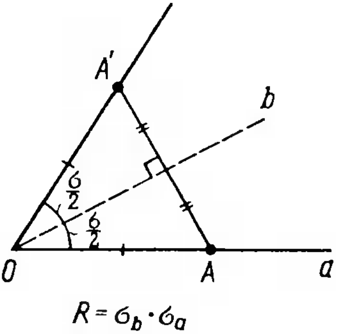


Рис. 294

рий σ_a и σ_b относительно прямых a и b, указано на рис. 293 и 294. Подробные доказательства этих утверждений проведите самостоятельно.

А *композиция нечетного числа движений второго рода снова является движением второго рода.*

Итак, мы показали, что *любое движение на плоскости можно представить композицией не более чем трех осевых симметрий.*

В пространстве правые и левые системы координат соответствуют пальцам правой и левой руки. Как и на плоскости, задание прямоугольной системы координат в пространстве задает ориентацию пространства. Те движения пространства, которые не меняют его ориентацию, называют движениями первого рода, те же движения пространства, которые изменяют ориентацию пространства на противоположную, — движениями второго рода. Как и на плоскости, перенос и поворот в пространстве являются движениями первого рода, а скользящая симметрия (в том числе и зеркальная симметрия) — это движения второго рода. Убедитесь в этом, выполнив соответствующие чертежи.

Как и на плоскости, движения первого рода в пространстве можно реализовать непрерывными перемещениями, а движения второго рода (в частности, зеркальную симметрию) — нельзя. Чтобы совместить зеркально симметричные фигуры непрерывным перемещением, не-

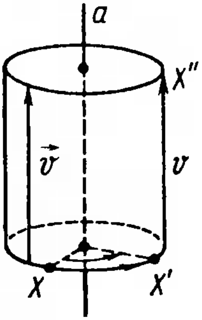


Рис. 295

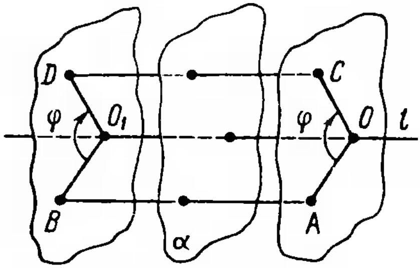


Рис. 296

обходимо выйти из трехмерного пространства в четырехмерное. Интересно, считал ли Евклид, что кисти правой и левой руки у человека равны, когда он формулировал седьмую аксиому о том, что совмещающиеся друг с другом фигуры равны между собой, и как он предполагал совместить их?

15.7. Классификация движений пространства. Аналог планиметрической теоремы Шаля для движений пространства формулируется так: *каждое движение пространства является одним из следующих движений:*

1) *композицией поворота в пространстве и параллельного переноса в направлении оси поворота* (рис. 295), *такое движение называется винтовым*;

2) *композицией поворота и зеркальной симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота, т. е. зеркальным поворотом* (рис. 296);

3) *композицией зеркальной симметрии и переноса в направлении, параллельном плоскости симметрии, т. е. скользящим отражением* (рис. 297).

Итак, движения первого рода в пространстве — это винтовые движения. Частные случаи винтовых движений — поворот и перенос (поворот — для нуль-вектора при винтовом движении, а перенос — для поворота на 0° в таком движении).

Движения второго рода в пространстве — это зеркальный поворот и скользящая симметрия. Зеркальная

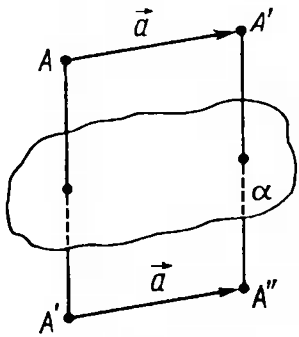


Рис. 297

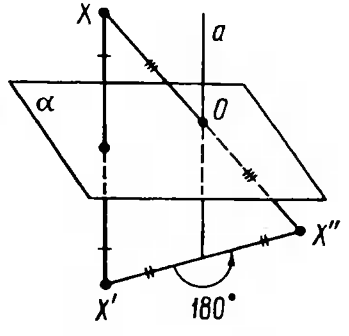


Рис. 298

симметрия — это частный случай зеркального поворота для угла 0°, а центральная симметрия — это зеркальный поворот на 180° (рис. 298).

Подобно тому, как на плоскости перенос и поворот можно представить композицией двух осевых симметрий, в пространстве перенос и поворот можно представить композицией двух зеркальных симметрий. Поэтому *любое движение пространства может быть сведено к композиции не более чем четырех зеркальных симметрий.*

§ 16. ПОДОБИЕ

16.1. Подобные фигуры. Из курса «Геометрии-8» (§ 18) нам известно, что подобными называют фигуры, которые имеют одинаковую форму. Подобны любые два круга, два правильных треугольника, два квадрата, два правильных многоугольника с одним и тем же числом сторон, две фотографии, напечатанные с одного и того же негатива с разными коэффициентами увеличения, или два плана одной и той же местности, выполненные в различных масштабах.

Как видно из этих примеров, с подобием фигур связано некоторое число — коэффициент увеличения, масштаб. Это число показывает, в каком отношении находятся все расстояния между парами соответствующих

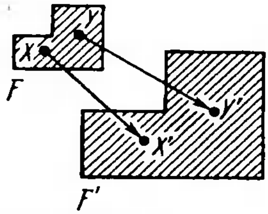


Рис. 299

точек подобных фигур. Это число одно и то же для любых соответствующих пар точек подобных фигур. Поскольку треугольники однозначно определяются своими сторонами, то подобными треугольниками в «Геометрии-8» мы назвали такие треугольники, в которых длины сторон находятся в одинаковом отношении, это отношение называется коэффициентом подобия.

Подобие произвольных фигур определяется так. Говорят, что **фигура F' подобна фигуре F, если ее точки можно так сопоставить точкам фигуры F, что все расстояния изменятся в одном и том же отношении.** Это значит, что для любой пары точек X, Y фигуры F и пары соответствующих им точек X', Y' фигуры F' выполняется равенство

$$|X'Y'| = k|XY|, \qquad (1)$$

где k — некоторое положительное число (рис. 299). Это число называется **коэффициентом подобия фигур F' и F.** Можно сказать и так: *подобие с коэффициентом $k > 0$ — это преобразование, при котором все расстояния умножаются на число k.* Символически подобие фигур F' и F с коэффициентом k записывают так: $F' \underset{k}{\sim} F$.

Равенство фигур является частным случаем подобия фигур с коэффициентом подобия, равным 1.

16.2. Преобразование подобия. Преобразование, которое переводит некоторую фигуру F в подобную ей фигуру F', называется **преобразованием подобия**, или **подобием** (см. рис. 299).

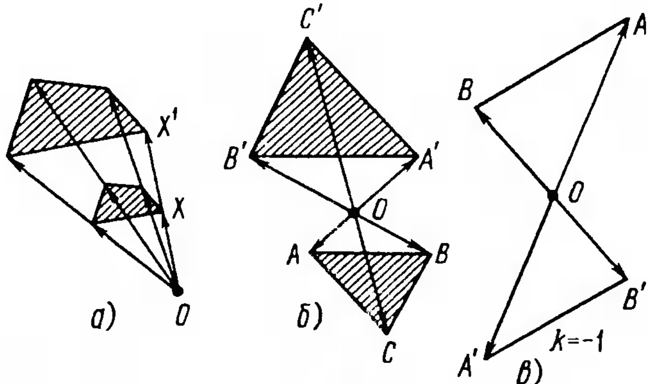


Рис. 300

Другими словами, подобием фигуры F называется такое ее преобразование, при котором все расстояния в фигуре F изменяются в одном и том же отношении. Это означает, что имеется такое число $k > 0$, что любым точкам X, Y фигуры F сопоставляются такие точки X', Y', что выполняется равенство (1): $|X'Y'| = k|XY|$. Число k называется **коэффициентом подобия**.

Движение является частным случаем подобия с коэффициентом $k = 1$. Важнейшим примером подобия является гомотетия. Она определяется так. Гомотетией с центром O и коэффициентом k (отличным от нуля) называется преобразование, при котором каждой точке X сопоставляется такая точка X', что

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX} \qquad (2)$$

(рис. 300, *а*). Не исключается, что $k < 0$ (рис. 300, *б*).

При $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием, а при $k = -1$ гомотетия — это центральная симметрия, при этом центр гомотетии является центром симметрии (рис. 300, *в*).

Основное свойство гомотетии. *При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k.* Подробнее: если точки X и Y при гомотетии с коэффициентом k перешли в точки X', Y', то

$$\overrightarrow{X'Y'} = k\overrightarrow{XY}. \qquad (3)$$

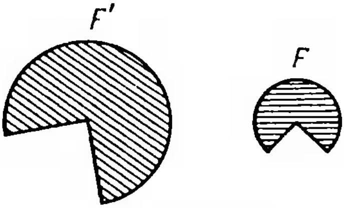


Рис. 301

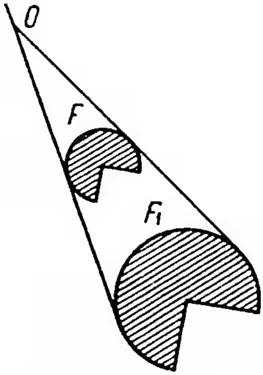


Рис. 302

Доказательство. Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY'} = k\overrightarrow{OY}$. Поэтому

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OY} - k\overrightarrow{OX} = k(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = k\overrightarrow{XY}.$$

Из равенства (3) следует, что $|X'Y'| = |k||XY|$. Последнее равенство означает, что *гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$.*

Любое подобие можно осуществить, выполняя последовательно гомотетию и движение. Другими словами, *подобие с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.*

Доказательство. Пусть фигура F' получена из фигуры F подобием с коэффициентом k (рис. 301). Гомотетией с коэффициентом k и любым центром переведем фигуру F в фигуру F_1 (рис. 302). Тогда любым точкам X, Y фигуры F ставятся в соответствие такие точки X_1, Y_1, что $|X_1Y_1| = k|XY|$. Но и для точек X', Y' фигуры F', соответствующих точкам X, Y, также $|X'Y'| = k|XY|$. Поэтому $|X'Y'| = |X_1Y_1|$. Это равенство верно для любых точек X', Y' фигуры F'. Следовательно, фигуры F' и F_1 равны, т. е. F_1 можно некоторым движением перевести в фигуру F'.

Свойства движений нам уже известны. После того как мы изучим в следующем пункте свойства гомотетии, нам станут ясны и свойства подобия, которое сводится к композиции гомотетии и движения.

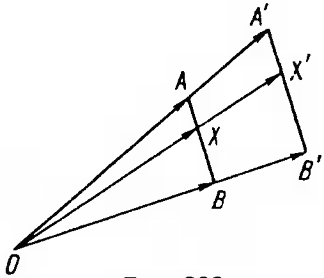


Рис. 303

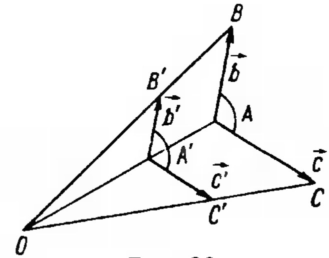


Рис. 304

16.3. Свойства гомотетии. Определив гомотетию векторным равенством (2), мы будем получать свойства гомотетии векторным методом. Так мы уже поступили при доказательстве основного свойства гомотетии — равенства (3). В этом пункте мы рассматриваем гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k. Образы точек, полученные в результате такой гомотетии, будем обозначать теми же буквами, что и исходные точки, но со штрихом.

Свойство 1. *Гомотетия отрезок переводит в отрезок.*

Доказательство. Пусть гомотетия переводит концы отрезка AB в точки A', B'. Точка X лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. При этом, когда число t возрастает от 0 до 1, точка X пробегает отрезок AB от A до B (рис. 303).

Умножим обе части равенства $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ на число k. Получим

$$k\overrightarrow{AX} = t(k\overrightarrow{AB}). \qquad (4)$$

По основному свойству гомотетии $\overrightarrow{A'X'} = k\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Подставив эти равенства в (4), получим $\overrightarrow{A'X'} = t\overrightarrow{A'B'}$. А это равенство означает, что точка X' пробегает отрезок $A'B'$ от A' до B', когда параметр t возрастает от 0 до 1.

Свойство 2. *Гомотетия сохраняет величину угла.*

Подробнее: для любых точек A, B, C и соответствующих им точек A', B', C' (рис. 304) выполняется равенство

$$\angle B'A'C' = \angle BAC. \qquad (5)$$

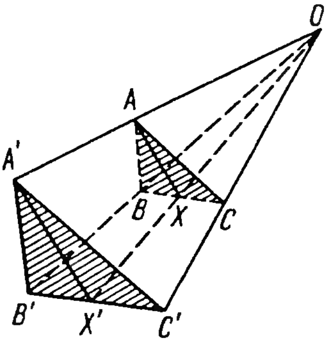


Рис. 305

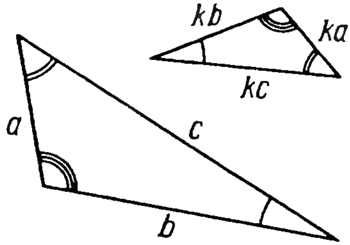


Рис. 306

Доказательство. Положим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{c}\,' = \overrightarrow{A'C'}$. Тогда $\angle BAC = \angle \vec{b}\,\vec{c}$ и $\angle B'A'C' = \angle \vec{b}'\vec{c}\,'$. По основному свойству гомотетии $\vec{b}' = k\vec{b}$ и $\vec{c}\,' = k\vec{c}$. Из этих двух равенств следует, что $|\vec{b}'| = |k||\vec{b}|$ и $|\vec{c}\,'| = |k||\vec{c}|$. Кроме того,

$$\vec{b}' \cdot \vec{c}\,' = (k\vec{b})\,(k\vec{c}) = k^2(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Но тогда

$$\cos \angle \vec{b}'\vec{c}\,' = \frac{\vec{b}' \cdot \vec{c}\,'}{|\vec{b}'||\vec{c}\,'|} = \frac{k^2(\vec{b} \cdot \vec{c})}{|k|^2|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \cos \angle \vec{b}\,\vec{c}. \qquad (6)$$

Из равенства косинусов (6) следует равенство углов (5).

Свойство 3. *Гомотетия треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.*

Доказательство. Пусть гомотетия треугольник ABC переводит в треугольник $A'B'C'$ (рис. 305). Треугольник ABC заполняют отрезки AX, когда точка X пробегает отрезок BC. Эти отрезки гомотетия переводит в отрезки $A'X'$ (по свойству 1), концы которых X' пробегают отрезок $B'C'$. Эти отрезки $A'X'$ и заполнят треугольник $A'B'C'$, в который переходит при гомотетии треугольник ABC.

Равенство соответственных углов этих треугольников вытекает из свойства 2, а пропорциональность их сторон следует из равенств

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}. \tag{7}$$

Переходя от векторных равенств (7) к равенству модулей, получим

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = |k|. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е. Равенства (7) свидетельствуют не только о пропорциональности сторон треугольников ABC и $A'B'C'$, но и о их сонаправленности.

16.4. Свойства подобия. Поскольку любое подобие сводится к композиции гомотетии и движения, то первые три свойства подобия являются непосредственными следствиями свойств гомотетии (п. 16.3) и свойств движения (п. 15.2). Они формулируются следующим образом.

С в о й с т в о 1. *Подобие отрезок переводит в отрезок.*

С в о й с т в о 2. *Подобие сохраняет величину угла.*

С в о й с т в о 3. *Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны* (рис. 306).

Многоугольные фигуры составлены из треугольников. Поэтому из свойства 3 следует, что подобие переводит многоугольную фигуру в многоугольную фигуру. Об изменении площадей многоугольных фигур при подобии речь идет в следующем свойстве.

С в о й с т в о 4. *При подобии с коэффициентом k площадь многоугольной фигуры умножается на k^2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними. При подобии с коэффициентом k каждая сторона умножается на k, а углы сохраняются. Поэтому площадь треугольника умножается на k^2.

Многоугольные фигуры составлены из треугольников, не имеющих общих внутренних точек. Значит, площадь многоугольной фигуры равна сумме площадей составляющих ее треугольников. Так как при подобии площадь каждого из них умножается на k^2, то и всю сумму следует умножить на k^2. Следовательно, площадь многоугольной фигуры при подобии с коэффициентом k надо умножить на k^2.

16.5. Признаки подобия треугольников. Вам известны два определения подобных треугольников. Первое было приведено в § 18 «Геометрии-8» (в нем подобные треугольники определялись как такие треугольники, у которых стороны пропорциональны), второе является частным случаем общего определения подобных фигур, данного в этом параграфе. Нет ли между этими определениями противоречия? Убедимся, что эти определения равносильны.

Из свойства 3 п. 16.4 следует, что из второго, общего определения вытекает первое определение. Покажем, что верно и обратное утверждение. Если стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ пропорциональны, то справедливы равенства

$$A'B' = kAB, \quad A'C' = kAC, \quad B'C' = kBC. \tag{9}$$

Гомотетией с коэффициентом k преобразуем треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 307). Согласно свойству 3 п. 16.3

$$A_1B_1 = kAB, \quad A_1C_1 = kAC, \quad B_1C_1 = kBC. \tag{10}$$

Из равенств (9) и (10) следует, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ имеют равные стороны. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ равны, а потому треугольник $A_1B_1C_1$ можно движением преобразовать в треугольник $A'B'C'$. Следовательно, треугольник ABC преобразован в треугольник $A'B'C'$ композицией гомотетии и движения, т. е. преобразованием подобия. Итак, из первого определения подобия треугольников вытекает второе. Поэтому оба определения равносильны.

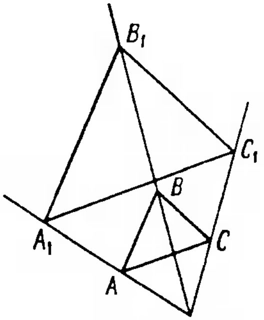


Рис. 307

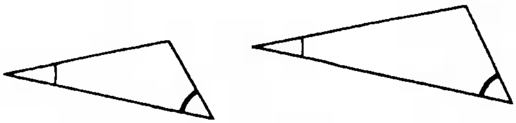


Рис. 308

Можно сказать и так: *пропорциональность сторон двух треугольников является характерным признаком подобия треугольников.*

Доказательства еще двух признаков подобия треугольников были приведены в § 18 «Геометрии-8». Напомним формулировки этих признаков и основные положения их доказательства. Подробные доказательства воспроизведите самостоятельно или повторите их по учебнику.

Первый признак. **Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны** (рис. 308).

Из равенства двух пар углов треугольников следует равенство их третьих углов (почему?). А тогда пропорциональность их сторон вытекает из теоремы синусов (вспомните эту теорему).

Второй признак. **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы треугольников, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

Чтобы установить, что отношение третьих сторон треугольников равно отношению первых и вторых сторон, достаточно подсчитать это отношение, воспользовавшись теоремой косинусов (рис. 309).

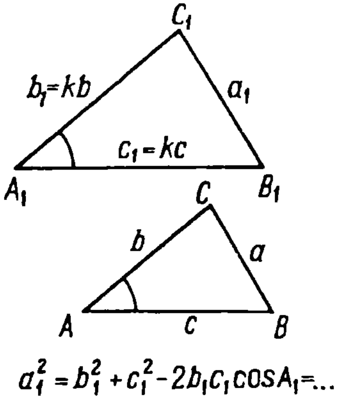


Рис. 309

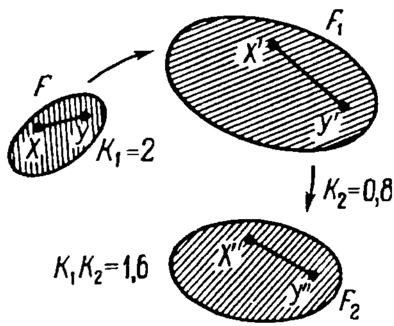


Рис. 310

16.6. Групповые свойства подобий и гомотетий. *Как подобие, так и гомотетия обратимы, и преобразования, обратные подобию или гомотетии с коэффициентом k, являются соответственно подобием или гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{k}$.*

Чтобы убедиться в справедливости этих утверждений, достаточно из равенств (1) и (2) получить равенства

$$|XY| = \frac{1}{k}|X'Y'|, \qquad \overrightarrow{OX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX'}. \tag{11}$$

Первое из них свидетельствует о подобии, второе — о гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Если последовательно выполнить сначала подобие с коэффициентом k_1, а затем к полученной фигуре применить подобие с коэффициентом k_2, то в результате получим подобие с коэффициентом k_1k_2 (рис. 310), т. е. при композиции подобий их коэффициенты перемножаются.

Действительно, пары соответствующих точек X, Y и X', Y' при первом подобии связаны равенством $|X'Y'| = k_1|XY|$. Для пар X', Y' и X'', Y'', соответствующих друг другу при втором подобии, выполняется равенство $|X'Y'| = k_2|X''Y''|$. Эти два равенства приводят к равенству $|X''Y''| = k_1k_2|XY|$, которое и показывает, что *композиция подобий является подобием, а коэффициенты подобий при этом перемножаются.*

Аналогичное утверждение верно и для гомотетий, но только для тех, у которых один и тот же центр.

Таким образом, мы можем утверждать теперь, что *совокупность всех подобий плоскости является группой преобразований плоскости.*

Аналогично *совокупность всех гомотетий с одним и тем же центром является группой преобразований плоскости.*

Группа движений и группа гомотетий являются подгруппами группы подобий плоскости.

16.7. Масштаб. Подобие лежит в основе правильного изображения предмета (т. е. на изображении сохраняется форма предмета). При этом возможно и уменьшение всех размеров предмета (например, на фотографии слона), и их увеличение (например, на снимках микробов). Любой план, будь то план города, квартиры или земельного участка, представляет собой подобное изображение. Масштаб, в котором выполнен план, есть не что иное, как коэффициент подобия. Когда пишут, например, масштаб 1 : 10 000, это значит, что коэффициент подобия равен 0,0001. При этом численные значения длин на плане те же, что и в действительности. Только на плане эти значения берутся в масштабе в сантиметрах, а в действительности — в километрах.

Но мы уже знаем (см. п. 10.8), что вполне точное изображение земной поверхности на картах невозможно: никакая часть сферы не развертывается на плоскость без искажения отношений длин. Для сравнительно небольших участков этим можно пренебречь и построить план, достаточно близкий к оригиналу. Но при изображении на картах больших участков поверхности Земли по необходимости отношения расстояний будут искажаться. Существует специальная наука — картография, которая, в

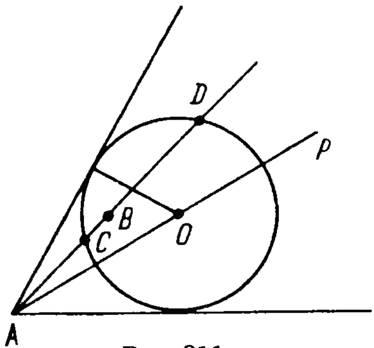


Рис. 311

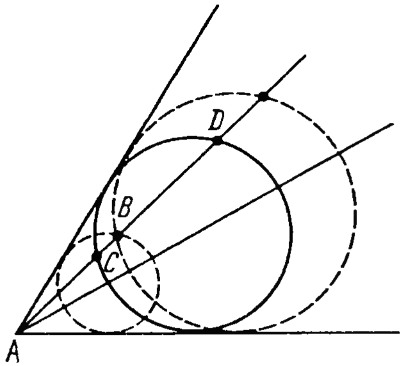


Рис. 312

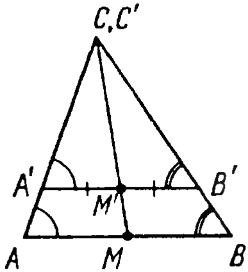


Рис. 313

частности, исследует способы построения карт, обладающих различными свойствами, например, сохраняющих углы между линиями или отношения площадей.

16.8. Метод подобия. Применяя метод подобия, в частности, гомотетии, к решению задач на построение, сначала строят фигуру, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме одного, а затем с помощью подобия находят искомую фигуру. Вот примеры таких задач.

Задача 1. *Дан угол A и внутри него точка B. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку B.*

Решение. Строим любую окружность F, касающуюся сторон угла A (рис. 311). Напомним, что центр O этой окружности лежит на биссектрисе угла A, а ее радиус равен перпендикуляру, опущенному из точки O на сторону угла A. Проведем луч AB и найдем точки пересечения C и D этого луча с окружностью F (рис. 312). Две искомые окружности получаются из окружности F гомотетиями с центром в точке A и коэффициентами $k_1 = \frac{AB}{AC}$ и $k_2 = \frac{AB}{AD}$.

Задача 2. *Построить треугольник по двум углам и медиане, идущей из третьего угла треугольника.*

Решение. Пусть заданы два угла α и β и отрезок m. Построим любой треугольник $A'B'C'$, имеющий углы α и β: $\angle A' = \alpha$ и $\angle B' = \beta$ (рис. 313). Найдем его медиану $M' = m'$. Искомый треугольник ABC получится из треугольника $A'B'C'$ подобием с коэффициентом $k = \frac{m}{m'}$.

16.9. Подобие в пространстве. Определение и свойства подобия в пространстве те же, что и на плоскости. Новым является утверждение: при подобии объем преобразуемой фигуры умножается на куб коэффициента подобия. Подумайте, почему это так, и приведите примеры.

Итак, запомните, что при подобии длины умножаются на коэффициент подобия k, площади — на k^2, объемы — на k^3.

Реальные примеры пространственных подобных фигур — это модели каких-либо предметов, например зданий, самолетов, автомобилей, поездов. При этом о коэффициенте подобия говорят обычно так: модель выполнена в одну тысячную натуральной величины.

§ 17. ИНВЕРСИЯ

17.1. Определение и аналитическое задание инверсии. В элементарной планиметрии рассматривают лишь те фигуры, которые либо сами состоят из отрезков прямых и дуг окружностей, либо границы которых образованы отрезками прямых и дугами окружностей. Поэтому можно сказать, что прямые и окружности — это основные линии в элементарной геометрии.

Преобразования, которые мы уже изучили (движения и подобия), переводят прямые — в прямые, а окружности — в окружности. Преобразованием, которое мы рассмотрим в этом параграфе, можно окружность перевести в прямую, а прямую — в окружность. Это преобразование — инверсия — интересно еще и тем, что оно во многом напоминает осевую симметрию, но осью инверсии является не прямая, а окружность. Определяется инверсия так.

Зададим некоторую окружность S с центром O и радиусом r (рис. 314). Каждой точке X, отличной от центра O, поставим в соответствие точку X' на луче OX такую, что

$$OX' \cdot OX = r^2. \qquad (1)$$

Это преобразование и называется **инверсией относительно окружности** S и обозначается I_S. Точка O называется **центром инверсии,** радиус r — **радиусом инверсии,** а окружность S — **окружностью инверсии.** В точке O инверсия I_S не определена и для точки О нет соответствующей точки.

Из симметричности точек X и X' следует свойство, которое роднит инверсию с осевой симметрией.

Свойство 1. *Если точке X соответствует при инверсии I_S точка X', то точке X' соответствует точка X. Поэтому преобразование, обратное инверсии, совпадает с самой инверсией.*

Про точки X и X', соответствующие друг другу при инверсии I_S как симметричные относительно окружности S, можно сказать, что одна из них лежит вне окружности, другая — внутри нее. Если же точка X лежит на окружности S, то она неподвижна при инверсии I_S, т. е. $I_S(X) = X$.

Действительно, в этом случае $OX = r$ и из (1) следует, что $OX' = r$, т. е. $X' = X$. Выделим это свойство.

Свойство 2. *При инверсии каждая точка окружности инверсии неподвижна.*

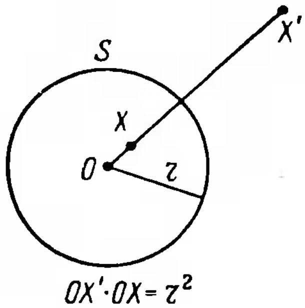


Рис. 314

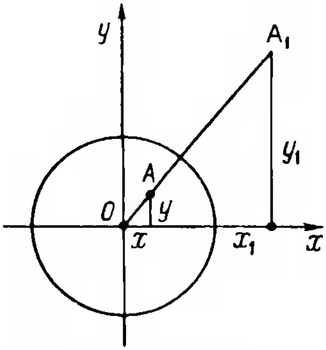


Рис. 315

Это свойство еще раз подчеркивает сходство инверсии и осевой симметрии. Отметим, что, выполнив дважды последовательно осевую симметрию или инверсию, мы в обоих случаях получим тождественное преобразование. Те преобразования, которые обладают таким свойством, называют **инволюциями**. Все симметрии и инверсия — инволюции.

Для нахождения других свойств инверсии мы будем использовать аналитический метод. Зададим инверсию I_S аналитически.

Введем прямоугольные координаты x, y с началом в центре O инверсии — точке O (рис. 315). Пусть точка A имеет координаты x, y, а соответствующая ей точка A_1 — координаты x_1, y_1. Эти же координаты имеют соответственно и векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_1}$ — радиус-векторы точек A, A_1. По определению инверсии эти векторы сонаправлены, т. е. найдется такое число $\lambda > 0$, что

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{OA}, \qquad (2)$$

и аналогичные равенства для координат этих векторов:

$$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \lambda y. \qquad (3)$$

Найдем λ. Так как $\lambda > 0$, то из равенства (2) следует, что $OA_1 = \lambda OA$. Умножим обе части последнего равенства на OA. Получим

$$OA_1 \cdot OA = \lambda OA^2. \quad (4)$$

Так как $OA_1 \cdot OA = r^2$, а $OA^2 = x^2 + y^2$, то из этих равенств и равенства (4) следует, что

$$\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение для λ в формулу (3), получаем формулы, задающие инверсию I_S:

$$\begin{aligned} x_1 &= r^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ y_1 &= r^2 \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Нам будут нужны формулы, выражающие и x, y через x_1, y_1. Конечно, x, y нетрудно выразить через x_1, y_1 из формулы (6). Но можно их получить и без вывода. Так как инверсия совпадает с обратным ей преобразованием, x, y выражаются через x_1, y_1 по тем же формулам, т. е.

$$\begin{aligned} x &= r^2 \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \\ y &= r^2 \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

17.2. Образы прямых и окружностей при инверсии. Нам уже известно, что прямые в декартовых координатах x, y на плоскости задаются линейными уравнениями, т. е. уравнениями вида

$$Bx + Cy + D = 0, \quad (8)$$

а окружности — квадратными уравнениями вида

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (9)$$

где a, b — координаты центра окружности, а r — ее радиус.

Уравнения вида (8) и (9) объединяются уравнениями вида

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0. \qquad (10)$$

Если $A = 0$, то из уравнения (10) следует уравнение (8), а если $A \neq 0$, то поделив обе части уравнения (10) на A и выделив полные квадраты, приходим к уравнению (9).

Итак, любая прямая и любая окружность может быть задана уравнением вида (10), и такое уравнение задает лишь прямые и окружности (хотя окружность может выродиться в точку, например, при $A = 1$ и $B = C = D = 0$, или даже в пустое множество при $A = D = 1$, $B = C = 0$).

Рассмотрим последовательно возможные случаи образов прямых и окружностей при инверсии I_S относительно окружности S с центром в начале координат — точке O и радиусом r.

Уравнение образа фигуры, заданной уравнением (10), получаем, подставляя в уравнение (10) x и y, выраженные по формулам (7):

$$D(x_1^2 + y_1^2) + Br^2x_1 + Cr^2y_1 + Ar^4 = 0. \qquad (11)$$

Так как уравнение (11) — это уравнение той же алгебраической природы, что и (10), множество прямых и окружностей, заданных им, инверсия переведет лишь в прямые и окружности, при этом возможны четыре варианта.

1) *Прямая l проходит через центр инверсии, т. е. через точку O* (рис. 316). В этом случае $A = D = 0$, уравнение (10) имеет вид: $Bx + Cy = 0$ и уравнение (11) тоже приводится к виду: $Bx_1 + Cy_1 = 0$.

Итак, *прямую l* (из которой «выколота» точка O) *инверсия I_S переводит в ту же самую прямую l* (с «выколотой» точкой O). Впрочем, в данном случае этот вывод

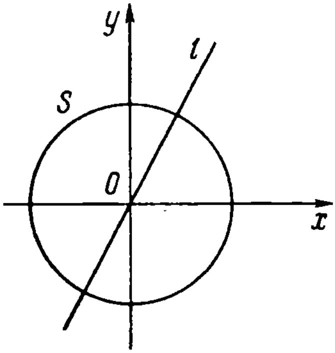


Рис. 316

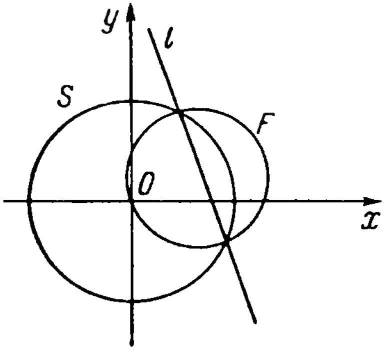


Рис. 317

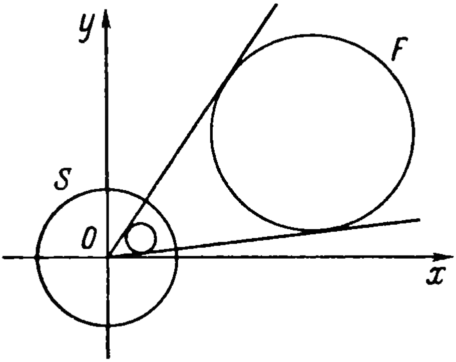


Рис. 318

мы могли бы получить из определения инверсии, что невозможно в трех следующих вариантах.

2) *Прямая l не проходит через центр инверсии точку O* (рис. 317). В этом случае $A = 0$, $D \neq 0$, и уравнение (11) задает окружность, которая пройдет через точку O, так как координаты (0, 0) удовлетворяют уравнению

$$D(x_1^2 + y_1^2) + Br^2x_1 + Cr^2y_1 = 0. \qquad (12)$$

Итак, *прямую, не проходящую через центр инверсии, инверсия переводит в окружность, проходящую через центр инверсии.*

3) *Окружность F проходит через центр инверсии точку O* (см. рис. 317). В этом случае $D = 0$, $A \neq 0$ и

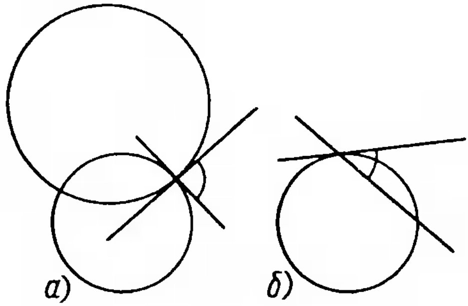


Рис. 319

уравнение (11) приводится к виду

$$Bx_1 + Cy_1 + Ar^2 = 0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) задает прямую, не проходящую через центр инверсии. Следовательно, *окружность, проходящую через центр инверсии, инверсия переводит в прямую, не проходящую через центр инверсии.*

4) *Окружность F не проходит через центр инверсии точку O* (рис. 318). В этом случае $A \neq 0$ и $D \neq 0$. Поэтому как уравнение (10), так и уравнение (11) задает окружность, не проходящую через центр инверсии.

Итак, *окружность, не проходящую через центр инверсии, инверсия переводит в окружность, также не проходящую через центр инверсии.* Отметим при этом, что инверсия не переводит центр окружности в центр ее образа.

17.3. Сохранение величин углов при инверсии. Инверсия не сохраняет расстояний между точками. Но оказывается, что *инверсия сохраняет углы между кривыми.* Мы докажем это утверждение лишь для углов между прямыми и окружностями. **Угол между пересекающимися окружностями** определяется как угол между касательными к ним прямыми в точке их пересечения (рис. 319, *а*). **Угол между окружностью и пересекающей ее прямой** (рис. 319, *б*) определяется аналогично —

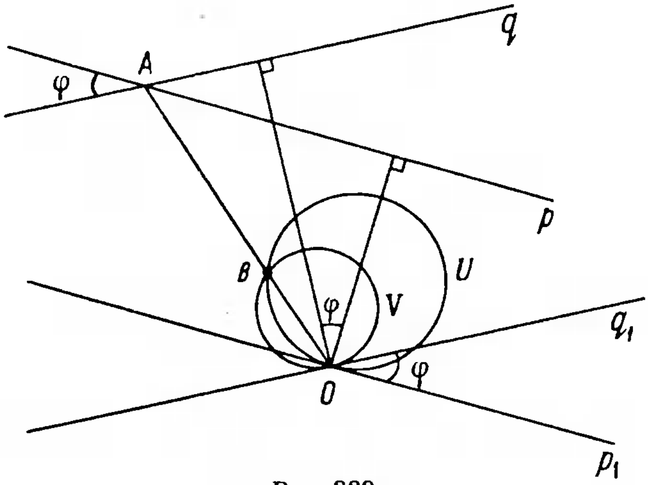


Рис. 320

как угол между этой прямой и касательной к окружности в их общей точке.

Отметим, что *если касаются две окружности или окружность и прямая, то их образы при инверсии также касаются.*

Действительно, если две фигуры имели единственную общую точку, то их образы после инверсии также имеют лишь одну общую точку, т. е. касаются.

Теперь докажем, что *при инверсии углы сохраняются для пересекающихся прямых, не проходящих через центр инверсии.*

Пусть прямые p и q пересекаются в точке A и не проходят через центр инверсии точку O (рис. 320). Инверсия I_S переведет прямую p в окружность U, прямую q — в окружность V и точку A — в точку B пересечения окружностей U и V. Кроме того, окружности U и V пересекаются и в точке O. Углы между окружностями U и V в точках B и O равны. Поэтому достаточно убедиться в том, что угол φ между прямыми p и q равен углу между касательными p_1 и q_1 к окружностям U и V в точке O. Но $p_1 \parallel p$ и $q_1 \parallel q$. Действительно, прямые p и p_1 не могут

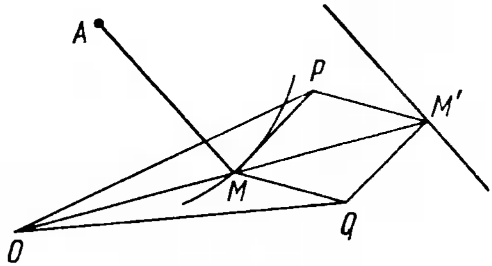


Рис. 321

пересекаться, так как если бы p и p_1 пересекались, то U и p_1 также пересекались бы, но U касается p_1. По той же причине q_1 не пересекается с q. Из параллельности прямых p и p_1, а также q и q_1 следует равенство углов между прямыми p и q и их образами — окружностями U и V.

Варианты пересекающихся окружностей и прямой, пересекающей окружность, сводятся к рассмотренному варианту двух пересекающихся прямых (объясните, почему).

17.4. Инверсор. Так называется механизм, который преобразует вращательное движение в прямолинейное. Он основан на свойствах инверсии, сопоставляющей друг другу окружности и прямые. Устроен он так.

Семь твердых стержней OP, OQ, PM, PM', QM, QM', AM соединены шарнирно так, как указано на рис. 321. Точки O и A неподвижны и $OA = AM$. Отрезки PM, PM', QM, QM' равны друг другу, т. е. $MPM'Q$ — ромб. Когда точка M вращается по окружности с центром A и радиусом AM, точка M' перемещается по прямой. Докажем это.

Установим, что произведение $OM \cdot OM'$ постоянно. Проведем окружность F с центром P и радиусом PM. Тогда произведение $OM \cdot OM'$ равно квадрату касательной, проведенной из точки O к F, т. е. $OM \cdot OM' = OP^2 - PM^2$. Величина $r^2 = OP^2 - PM^2$ постоянна. Итак, точки

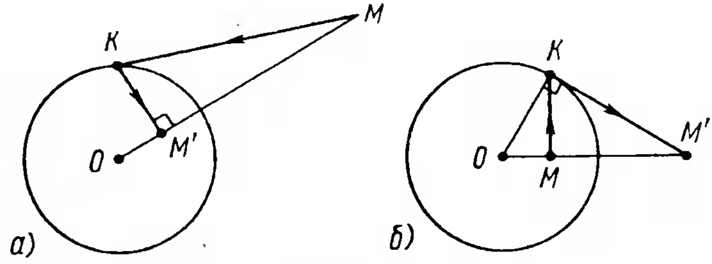


Рис. 322

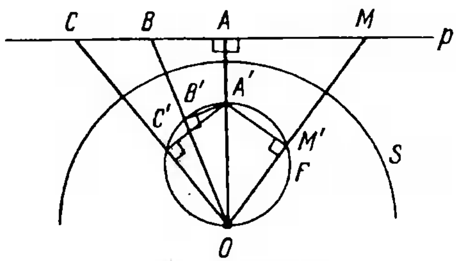


Рис. 323

M и M' соответствуют друг другу при инверсии с центром O и радиусом r. Поэтому, когда точка M двигается по дуге окружности, проходящей через точку O, точка M' двигается по прямолинейному отрезку (вариант 3 из п. 17.2).

Комментарий

Вы обратили внимание на то, что при инверсии та часть плоскости, которая находится вне круга инверсии, отображается внутрь этого круга и наоборот? Слово «инверсия» происходит от латинского *inversio* — перестановка, превращение.

«Инволюция» происходит от латинского слова *involutio* — свертывание, скрученное состояние листьев.

Как построить точку M', соответствующую точке M при инверсии относительно окружности S, вам подскажет рис. 322. Доказать, что инверсия переводит прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии, поможет рис. 323.

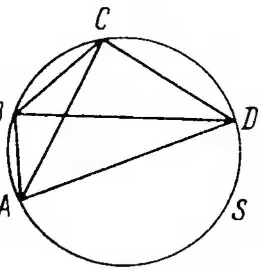


Рис. 324

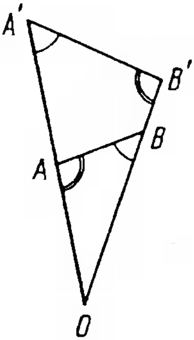


Рис. 325

17.5. Метод инверсии. Преобразование инверсии позволит нам достаточно просто доказать одну красивую теорему и решить важную задачу на построение, которые геометрам Древней Греции приходилось доказывать и решать значительно сложнее. Но ведь в Древней Греции не знали инверсии! Речь идет о теореме Птолемея[1] и задаче Аполлония.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ. **Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (рис. 324):**

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \qquad (14)$$

При доказательстве теоремы Птолемея нам потребуется следующая лемма:

ЛЕММА. **Пусть A' и B' — образы точек A и B при инверсии с центром O и радиусом r. Тогда треугольники $OA'B'$ и OBA подобны и**

$$A'B' = AB\frac{r^2}{OA \cdot OB}. \qquad (15)$$

---

[1]*Клавдий Птолемей* (ок. 90 — ок. 160) — древнегреческий астроном и математик, живший в Александрии.

Доказательство леммы. По определению инверсии выполняются равенства

$$OA' \cdot OA = r^2,$$
$$OB' \cdot OB = r^2. \tag{16}$$

Следовательно, $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB$, и потому

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}. \tag{17}$$

Значит, треугольники OAB и $OA'B'$ имеют общий угол при вершине O и их стороны, идущие из этой вершины, пропорциональны (рис. 325). По второму признаку подобия (п. 16.5) треугольники OAB и $OB'A'$ подобны. При этом вершине A соответствует вершина B', а вершине B — вершина A'. Но тогда

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}. \tag{18}$$

Из этого равенства следует, что

$$A'B' = AB\frac{OA'}{OB}. \tag{19}$$

Подставляя в формулу (19) выражение $OA' = \frac{r^2}{OA}$ из формулы (16), получаем формулу (15).

Доказательство теоремы Птолемея. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность S (см. рис. 324). Произведем инверсию с центром в точке D и с любым радиусом r. Эта инверсия I переведет окружность S в прямую p, не проходящую через точку D, а точки A, B, C — в точки A', B', C', лежащие на этой прямой (рис. 326). При этом точка B' лежит на отрезке $A'C'$, поэтому

$$A'C' = A'B' + B'C'. \tag{20}$$

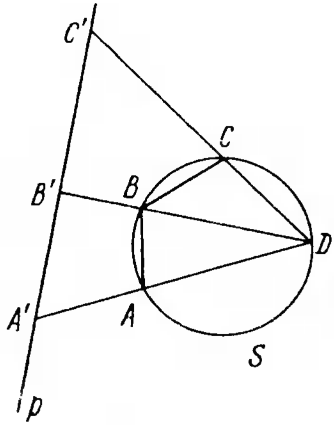


Рис. 326

По лемме

$$A'C' = AC\frac{r^2}{DA \cdot DC},$$

$$A'B' = AB\frac{r^2}{DA \cdot DB}, \qquad (21)$$

$$B'C' = BC\frac{r^2}{DB \cdot DC}.$$

Подставив значения $A'C'$, $A'B'$, $B'C'$ из формул (21) в формулу (20) и упростив выражение, получим формулу (14).

Задача Аполлония о построении окружности, касающейся трех заданных окружностей, еще на несколько веков древнее теоремы Менелая. Аполлоний Пергский был младшим современником Архимеда. Главное сочинение Аполлония «Конические сечения» содержит сотни теорем об **эллипсе, гиперболе и параболе** — тех кривых, которые получаются при сечении конуса плоскостью. Эти кривые называют также **кривыми второго порядка,** так как, кроме них, да еще точки, одной или двух пря-

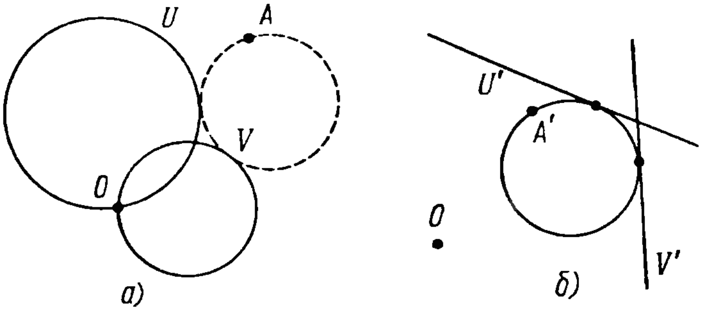


Рис. 327

мых, общее уравнение второго порядка от двух переменных x, y, т. е. уравнение вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{22}$$

других фигур не задает.

Если точку считать окружностью нулевого радиуса, а прямую — окружностью бесконечного радиуса, то задачу о построении окружности, проходящей через три заданные точки, и задачу о построении окружности, проходящей через данную точку и касающуюся двух данных прямых (см. п. 16.8, рис. 312), можно считать частными случаями задачи Аполлония.

К построению окружности, проходящей через данную точку и касающуюся данных прямых, сводится задача Аполлония для случая, когда заданы две пересекающиеся окружности U и V и точка A (рис. 327, *а*). Если произвести инверсию с центром в одной из точек пересечения окружностей U и V, то они перейдут в две прямые U' и V' (рис. 327, *б*), а точка A — в некоторую точку A'.

Как решать задачу о построении окружности, касающейся двух прямых и проходящей через данную точку, мы уже знаем. Поэтому, решив эту задачу и снова применив ту же инверсию (ведь она совпадает с обратной ей), мы построим окружность, касающуюся окружностей U и V и проходящую через точку A (при этом учитываем, что при инверсии касание фигур сохраняется).

Аналогичным приемом можно решить задачу о построении окружности, проходящей через данную точку и касающейся заданных прямой и окружности, если эти прямая и окружность имеют общую точку: эту точку мы и выбираем центром инверсии.

Найдите варианты задачи Аполлония, когда для ее решения удобно применить инверсию.

ИТОГИ ГЛАВЫ 3

Казалось бы, мы можем завершить наш учебник предыдущей главой, ведь все основные теоремы планиметрии уже доказаны. Но тогда мы не расскажем об одной из основных идей современной геометрии — идее преобразования. Отсутствие этой идеи в геометрии равносильно отсутствию в алгебре идеи функции. Геометрические преобразования — это функции, аргументами и значениями которых являются не числа, а точки и фигуры.

Мы рассмотрели три типа преобразований: *движения* — преобразования, сохраняющие расстояния (§ 11—15), *подобия* — преобразования, сохраняющие отношения расстояний (§ 16), *инверсии* — преобразования, переводящие множество прямых и окружностей в это же множество (§ 17). Эти преобразования естественны для элементарной геометрии, в которой окружности и прямые являются основными фигурами.

Для движений и подобий были доказаны теоремы об их классификации. Оказалось, что любое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо композицией осевой симметрии и переноса в направлении оси симметрии (п. 15.4). Подобие — композиция гомотетии и движения (п. 16.2).

В главе 3 мы изучали не только свойства преобразований, но и использование преобразований как метода для решения задач и доказательств теорем. Следует заметить, что всю элементарную геометрию можно построить, положив в основу некоторую группу преобразований (о группе преобразований мы говорили в п. 11.4).

Движения пространства допускают столь же простую классификацию (см. п. 15.7), как и движения плоскости.

В § 14 изложен материал о симметрии фигур. Идущая от геометрии идея симметрии стала одной из важнейших идей и в других областях науки и искусства.

Глава 4

Новая эпоха в геометрии

Мы изложили основы элементарной евклидовой геометрии. При этом планиметрию мы строили систематически, дедуктивно, опираясь при доказательстве новых теорем на доказанные ранее или на аксиомы. О стереометрии мы рассказали обзорно, более подробно вы познакомитесь с ней в курсе X—XI классов.

Завершаем же мы этот курс рассказом о той революции в геометрии, которая связана с возникновением неевклидовой геометрии. Появление новой геометрии знаменовало переворот не только в математике, но и в развитии человеческого мышления вообще.

§ 18. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

18.1. Решение проблемы пятого постулата. Об этой проблеме мы уже говорили и в «Геометрии-7» (§ 7), и в «Геометрии-8» (§ 2), и знаем, что все попытки вывести пятый постулат из других постулатов и аксиом сводились к подмене его некоторым утверждением, равносильным пятому постулату. Сейчас в евклидовой геометрии чаще всего в качестве аксиомы формулируют утверждение о единственности прямой, проходящей на плоскости через данную точку и параллельную данной прямой, не

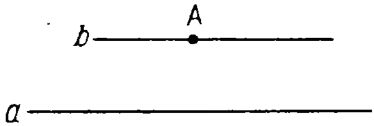


Рис. 328

проходящей через заданную точку (рис. 328). Это утверждение и называют **аксиомой параллельности Евклида.**

Мы выбрали другой эквивалент пятого постулата — аксиому о том, что можно построить прямоугольник с любыми заданными сторонами. Из этой аксиомы легко вытекает теорема о сумме углов треугольника (§ 7 «Геометрии-7»).

Оказывается, утверждение о том, что хотя бы один треугольник имеет сумму углов, равную 180°, также является равносильным пятому постулату Евклида. Это было установлено в начале XIX в. французским математиком Адриеном Лежандром.

Работам Лежандра по проблеме пятого постулата предшествовали труды итальянского геометра Джованни Саккери (1667—1733) и немецкого математика Иоганна Ламберта. Их исследования тоже были связаны с суммой углов, но не треугольника, а четырехугольника, и привели, по существу, к утверждению о равносильности пятого постулата Евклида и той аксиомы прямоугольника, которую мы и формулировали в § 7 «Геометрии-7».

Проблемой пятого постулата занимались более 2000 лет многие геометры. Вот имена некоторых из них: греческий математик Прокл (ок. 410—485), персидский поэт, математик и философ Омар Хайям (ок. 1048 — ок. 1123), арабский ученый Насир-Эддин ат Туси (1201—1274), шотландский математик Джон Плейфер (1748—1819). Именно Плейфер сформулировал как аксиому утверждение о единственности параллельной прямой, которую сейчас и называют аксиомой параллельности Евклида.

Однако никто из этих исследователей не высказал идеи о том, что наряду с евклидовой геометрией возможна другая, отличная от нее геометрия. Немецкий философ Иммануил Кант (1724—1804) даже считал, что свои геометрические представления человек получает от рождения, независимо от опыта, и эти представления соответствуют евклидовой геометрии.

В конце XVIII в. проблемой пятого постулата стал заниматься математик Карл Гаусс (1777—1855). Об исследованиях Гаусса знали лишь его друзья из писем к ним, а математики узнали о них только после смерти Гаусса, когда эти письма были опубликованы.

Вот отрывки из писем Гаусса: «...Допущение, что сумма углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу...»; «Между тем я еще долго не приду к тому, чтобы обработать для опубликования мои весьма обширные исследования по этому вопросу, и может быть, этого никогда не произойдет в моей жизни, так как я опасаюсь крика беотийцев[1], если я выскажу мои воззрения целиком...».

Итак, Гаусс побоялся опубликовать свои результаты по проблеме пятого постулата. Поэтому слава решения этой проблемы принадлежит двум младшим современникам Гаусса: русскому геометру Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856) и венгерскому геометру Яношу Бойяи (1802—1860). Они не только обладали математическим гением, но и имели мужество выступить открыто с сообщениями о своих результатах, столь противоречащих привычным, устоявшимся представлениям.

Первый доклад Н. И. Лобачевского о его геометрии был сделан на заседании физико-математического фа-

[1]Жители Беотии в Древней Греции славились своими скверными характерами и под беотийцами Гаусс имеет в виду самонадеянных невежд.

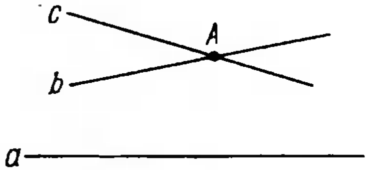


Рис. 329

культета Казанского университета 23 февраля 1826 г., а первые его публикации появились в 1829—1830 гг.

В 1832 г. Я. Бойяи опубликовал как приложение к курсу математики, изданному его отцом Фаркашем Бойяи (доказавшим теорему о равносоставленности равновеликих многоугольников), свое сочинение о неевклидовой геометрии. Оно было написано на латыни и название его начиналось словом *appendix* (приложение). Поэтому впоследствии это сочинение издавали под названием «Аппендикс».

Таким образом, Лобачевский и Я. Бойяи заменили аксиому параллельности Евклида ее отрицанием и предположили, что *на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную* (рис. 329). Опираясь на эту аксиому, они построили геометрию, отличную от евклидовой, но столь же непротиворечивую. Эта геометрия называется **геометрией Лобачевского**.

Как сама аксиома параллельности Лобачевского, так и другие результаты геометрии Лобачевского противоречат привычным представлениям и выводам евклидовой геометрии. Опасения Гаусса были справедливыми — Лобачевский и Я. Бойяи остались непонятыми почти всеми математиками своего времени. Более того, Лобачевский подвергался насмешкам. Однако он имел мужество развивать новую геометрию и публиковать все более развернутые ее изложения.

Подробнее о Николае Ивановиче Лобачевском мы расскажем в п. 18.2. А этот пункт мы завершаем: *пятый постулат не может быть выведен из остальных* *постулатов и аксиом евклидовой геометрии, а потому наряду с евклидовой геометрией может быть построена логически непротиворечивая неевклидова геометрия — геометрия Лобачевского.* В этом и состоит решение проблемы пятого постулата.

18.2. Н. И. Лобачевский. Первые десятилетия XIX в. были временем духовного подъема русского общества — временем декабристов, Пушкина, Глинки... И в этом восхождении России на высоты мировой культуры явление Лобачевского особенно значительно.

Н. И. Лобачевский родился 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде. Он рано потерял отца (в 1797 г.), его мать с тремя малолетними сыновьями после смерти мужа переехала в Казань. С 1802 г. Лобачевский учился в Казанской гимназии, а в феврале 1807 г. был зачислен студентом Казанского университета, с которым с этого времени связана вся его жизнь. В 1811 г. Лобачевский получил звание магистра, и его оставили при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1812 г. началась его педагогическая деятельность, в 1816 г. он занимает должность профессора, а с 1827 по 1846 г. — ректора.

Как ректор Н. И. Лобачевский многое сделал для развития и строительства основанного в 1804 г. Казанского университета. Его взгляды на просвещение и науку выразила замечательная речь «О важнейших предметах воспитания», произнесенная им в торжественном собрании в 1828 г. В этой речи ученый называет математику «торжеством ума человеческого», и эти слова, конечно, можно отнести и к созданной им геометрии, которую он назвал «воображаемой».

Появление «воображаемой» математической теории изменяло, можно сказать, самую сущность математики. Ведь математика до этого времени была наукой о *количественных отношениях и пространственных формах реальной действительности.* При всей своей абстрактности математика служила отражением действительности, не прямым, но все же отражением (например, понятие функции опиралось на общее представление о связи переменных величин). За неевклидовой геометрией ничего реального не стояло. Поэтому появление неевклидовой геометрии было важным шагом в превращении математики в науку о *логически мыслимых формах и отношениях*.

При жизни Н. И. Лобачевского с высокой оценкой его открытия публично выступил (в 1842 г.) лишь один математик — профессор П. И. Котельников. К. Гаусс, ознакомившись с написанной по-немецки книгой Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», стал изучать русский язык, чтобы прочитать другие его работы. Гаусс высоко оценил эти работы (опять-таки, в частных письмах), и по его предложению в 1842 г. Лобачевского избирают членом-корреспондентом Геттингенского научного общества.

До последних дней своей жизни, уже ослепший, Лобачевский работал над все более развернутым изложением своей геометрии. Он умер 24 февраля 1856 г., через 30 лет после своего первого доклада о созданной геометрии.

18.3. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского. Несмотря на то, что свою геометрию Лобачевский развил столь же глубоко, сколь была развита евклидова геометрия, вопрос о том, нет ли в ней противоречий, при жизни ученого решен не был, хотя косвенные доказательства ее непротиворечивости у Лобачевского имелись. Вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии до открытия геометрии Лобачевского не вставал, потому что с древнейших времен геометры изучали свойства окружающего пространства. Это пространство и было предметом геометрии. Но когда Лобачевский заменил аксиому параллельных на ее отрицание, вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии возник со всей остротой: не могут ли выводы из этой аксиоматики

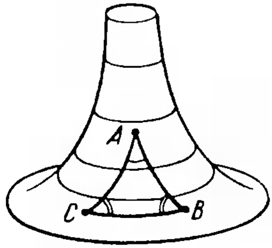


Рис. 330

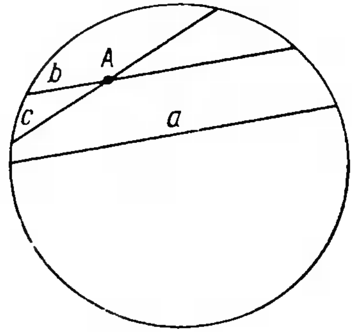


Рис. 331

привести к двум взаимно исключающим друг друга утверждениям? Смысл геометрии Лобачевского оставался неясным, потому что не было объекта, ни реального, ни абстрактного, к которому бы она относилась. Лобачевский и Гаусс, измеряя сумму углов у треугольников с вершинами на звездном небе, пытались выяснить, какая геометрия справедлива в космических масштабах. Однако их измерения не дали в пределах допустимой точности отклонений от евклидовой геометрии.

Первую реализацию геометрии Лобачевского (правда, не всей плоскости Лобачевского, а лишь ее ограниченных областей) установил в 1868 г. итальянский математик Эудженио Бельтрами (1835—1900). Бельтрами показал, что если на некоторых поверхностях (одна из них изображена на рис. 330) кратчайшие по длине линии, соединяющие пары точек, считать отрезками, а затем для таких «отрезков» развивать как обычно элементарную геометрию, то построенная геометрия будет геометрией Лобачевского. Тем самым в рамках евклидовой геометрии была построена реализация конечных областей плоскости Лобачевского.

В 1871 г. немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) реализовал в круге на евклидовой плоскости геометрию всей плоскости Лобачевского. Правда, эту реализацию плоскости Лобачевского называют также моделью Кэли—Клейна, потому что фактически ее построил в 1859 г. английский алгебраист Артур Кэли (1821—1895). Однако он не понял, что введенная им геометрия в круге есть геометрия Лобачевского.

В модели Кэли—Клейна вся плоскость Лобачевского представляется внутренностью круга (рис. 331), прямые — хордами (с исключенными концами, поскольку рассматривается только внутренность круга). Преобразования круга на себя, переводящие хорды в хорды, принимаются за движения. Так что равными считаются фигуры внутри круга (в том числе и отрезки), которые переводятся одна в другую такими преобразованиями круга. Аксиома Евклида о параллельных очевидно не имеет место, а имеет место аксиома Лобачевского, так как через точку A (рис. 331) проходит бесконечно много «прямых» — хорд, не пересекающих «прямую» a.

Еще одну модель геометрии Лобачевского в 1882 г. построил французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912). Эту модель мы с вами построим в § 20, решив тем самым проблему пятого постулата в рамках школьного учебника. А ведь над этой проблемой бились более 2000 лет крупнейшие математики.

Во всех этих реализациях, или, как еще говорят, моделях, каждая теорема геометрии Лобачевского интерпретируется как некоторая теорема евклидовой геометрии. Поэтому, если бы в геометрии Лобачевского существовали противоречия, то они реализовались бы через эти модели как противоречия в евклидовой геометрии. А непротиворечивость евклидовой геометрии сомнений не вызывала. Итак, *геометрия Лобачевского столь же непротиворечива, сколь непротиворечива евклидова геометрия.*

18.4. Значение открытия Лобачевского. Почему же, говоря об открытии Лобачевским неевклидовой геометрии, мы называем это событие революцией в математике? Да, конечно, была решена проблема пятого постулата, но ведь в XIX в. получили решения и другие столь же древние проблемы: трисекция угла, удвоение куба, квадратура круга. Дело в том, что их решение стало лишь очередным шагом в развитии математики, но не открывало новой эпохи.

На протяжении веков никакая другая геометрия, кроме евклидовой, не мыслилась не только в математике, но, что еще существеннее, в физике. Евклидова геометрия рассматривается как геометрия реального пространства. Появление неевклидовой геометрии по-новому поставило вопрос об отношении геометрии к действительности. Пока существовала только евклидова геометрия, ее соответствие свойствам пространства принималось как само собой разумеющееся. С возникновением неевклидовой геометрии встал вопрос: какая из геометрий точнее отражает свойства реального пространства.

Геометрия раздвоилась: она выступает, с одной стороны, как часть чистой математики, от которой требуется только логическая состоятельность, с другой — как теория пространственных отношений, и в этом качестве она принадлежит уже не математике, а физике, поскольку должна согласовываться с опытом. Все это содержалось в неевклидовой геометрии как бы в зачатке и выявилось со временем.

Новые теории XIX в. превращали математику в науку о логически мыслимых, абстрактных, «чистых» формах. В геометрии вскоре за геометрией Лобачевского появилась многомерная евклидова геометрия, а за ней и гораздо более общие теории. Подобно геометрии, развивалась и алгебра, и анализ, была открыта теория множеств, математическая логика, другие разделы математики.

В этом общем преобразовании математики пионерская роль принадлежала геометрии Лобачевского, и в этом заключается ее особое значение.

Лобачевский был назван «Коперником геометрии», но его можно назвать и Колумбом науки, открывшим новую ее область, за которой следовал материк новой геометрии и вообще новой математики.

Принципиальное значение имела мысль, что общие законы пространственных отношений в реальной геометрии могут подчиняться евклидовой геометрии неточно, а потому подлежат исследованию опытом — мысль, воплощенная много времени спустя в общей теории относительности Альберта Эйнштейна (1879—1955).

§ 19. ОСНОВАНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

19.1. Аксиоматический метод. В самом начале «Геометрии-7» мы говорили, что все геометрические факты можно вывести из небольшого числа простых и очевидных утверждений, которые называют аксиомами. Аксиом в геометрии немного, они наглядны и очевидны и берутся из практики и наблюдения. Мы приводили слова Ньютона о том, что геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, столь многого достигает.

Но вот оказалось, что наряду с геометрией Евклида, аксиомы которой наглядны и очевидны, может быть построена геометрия Лобачевского, одна из аксиом которой явно противоречит нашим наглядным представлениям. Посмотрите на рис. 329: конечно, одна из прямых b или c должна пересечь прямую a. Так что же, геометрия Лобачевского вздор, чепуха? Но ведь она может быть реализована в рамках евклидовой геометрии, например, внутри круга на модели Кэли—Клейна (см. рис. 331).

Такие вопросы заставили геометров строже отнестись к основаниям геометрии, по-новому подойти к понятию аксиомы.

Евклид, как и все геометры вплоть до конца прошлого века, считал многое само собой разумеющимся, например, что точка разбивает прямую на два луча, что из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими и т. п. Но ведь задача геометрии состоит в том, чтобы выразить все, что требуется для получения теорем геометрии, чисто логическим путем. Поэтому если аксиоматика соответствует этой цели, то следует вовсе отвлечься от наглядных представлений, чтобы быть уверенным в том, что выводы получены чисто логическими рассуждениями, без ссылок на очевидность и т. п. Наглядные представления основанием для выводов служить не могут (хотя, конечно, могут им помогать).

Так возник формальный взгляд на геометрию и ее аксиоматику, отвлеченный от конкретного содержания, в котором исходные основные понятия и аксиомы берутся только как предпосылки логических выводов.

Самым известным сочинением, излагающим такую трактовку геометрии, стал труд немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943) «Основания геометрии», вышедший в 1899 г. Краткое (всего два абзаца) введение в этой книге Гильберт начинает так:

«Геометрия,— так же как и арифметика,— требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений — это задача, которая со времен Евклида являлась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы».

В первой главе Гильберт определяет основные понятия геометрии:

«Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками и обозначаем A, B, C..; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c..; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ...

Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежат», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается аксиомами геометрии».

Далее ученый формулирует аксиомы и выводит из них теоремы. Вспомним, что у Евклида «Начала» открываются списком из 23 определений, в которых понятия «точка», «прямая», «поверхность» и другие разъясняются с помощью понятий, которые считаются известными (например, понятие «длины» и «ширины»). С одной стороны, эти понятия тоже следовало бы определить, с другой — процесс определений не может продолжаться бесконечно, и какие-то понятия следует взять за исходные, основные, которым уже не дается явных определений.

Так и поступает Гильберт: он лишь называет понятия «точка», «прямая», «плоскость» и дает им обозначения. Эти понятия у Гильберта основные.

Затем Гильберт называет основные отношения: «лежать», «между» и т. д. Свойства этих отношений формулируются в аксиомах, наглядность которых неоднозначна. Конкретная реализация этих основных понятий различна, главное, чтобы для них выполнялись свойства, сформулированные в аксиомах. Так, в разных моделях геометрии Лобачевского «прямая» может быть реализована на евклидовой плоскости и как отрезок, и как полуокружность.

Описывая свойства основных объектов и отношений, аксиомы являются неявными определениями основных объектов и отношений. Поэтому на вопрос: «Что такое прямая?» можно ответить так: «Прямая — это то, о чем под названием «прямая» говорят аксиомы».

Таково современное понимание аксиоматического метода в математике вообще.

В конце XIX в. интенсивная работа по построению теории аксиоматическим методом велась не только в геометрии, но и в других разделах математики: например, были построены аксиоматики различных числовых систем — для натуральных, рациональных, действительных чисел и т. д.

При построении одной и той же теории аксиоматическим методом принимать за основные можно разные понятия, так же как принимать за аксиомы можно разные утверждения (вспомните об эквивалентах пятого по-

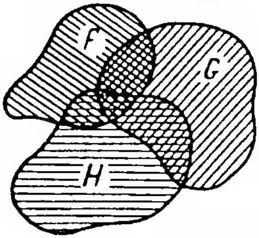


Рис. 332

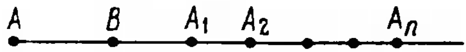


Рис. 333

стулата). Примеры таких различных построений дают школьные учебники геометрии. Изложим ту аксиоматику, на базе которой мы строили наш курс.

19.2. Аксиоматика евклидовой плоскости. Аксиоматикой называют перечень основных понятий и аксиом. Часто говорят о **системе** аксиом, так как они связаны друг с другом и образуют определенную систему.

Основные понятия, используемые при аксиоматическом построении геометрии, подразделяют на два вида: одни обозначают **объекты**, которыми занимается геометрия, другие — **отношения** между ними.

За основные объекты мы принимаем следующие: 1) **точки**; 2) **отрезки**; 3) **фигуры**. При этом точки и отрезки считаются частными видами фигур.

За основные отношения между этими объектами принимаются: 1) **точка принадлежит фигуре; 2) точка является концом отрезка; 3) два отрезка равны.**

Если точка A принадлежит фигуре F, то пишут: $A \in F$.

Используя основные понятия, можно дать такие определения.

Фигура F содержит фигуру G, если каждая точка фигуры G является точкой фигуры F.

Фигура называется **объединением** некоторых данных фигур, если ей принадлежат все точки этих фигур и никакие другие (рис. 332).

Лучом AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков с концом A, содержащих точку B (рис. 333).

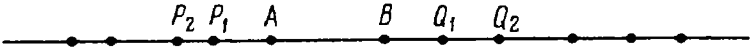


Рис. 334

Прямой AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков, содержащих точки A и B (рис. 334).

Теперь можно формулировать аксиомы. Они делятся на несколько групп. Римской цифрой обозначается номер группы аксиом, а арабской — номер аксиомы в этой группе (если их больше одной).

I. Аксиомы связи отрезков и точек.

I.1. *Существуют, по крайней мере, две точки.*

I.2. *Для каждых двух точек существует, и притом единственный, отрезок, концами которого являются данные точки.*

I.3. *У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки.*

О точках отрезка, отличных от его концов, говорят, что они лежат внутри этого отрезка или между его концами.

I.4. *Точка C, лежащая внутри отрезка AB, разбивает его на два отрезка AC и CB, т. е. AB есть объединение отрезков AC и CB, которые имеют лишь одну общую точку C.*

В этом случае говорят, что отрезок AB составлен из отрезков AC и CB.

I.5. *Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов, т. е. для каждого отрезка AB существует содержащий его отрезок AC с концом C, отличным от B.*

I.6. *Объединение двух отрезков, имеющих две общие точки, является отрезком; его концами служат два из концов этих отрезков.*

Из шести аксиом первой группы об отрезках в § 1 «Геометрии-7» мы формулировали лишь аксиомы I.2 и I.5, остальные четыре считали очевидными и пользовались ими, не выделяя их специально.

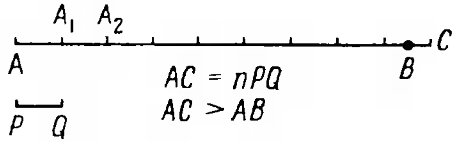


Рис. 335

Во второй группе аксиом говорится о равенстве отрезков. Как обычно, равенство отрезков AB и CD обозначается так: $AB = CD$.

II. Аксиомы равенства отрезков.

II.1. *Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны.*

II.2. *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному отрезку, и притом только один.*

Подробнее: если заданы луч l с началом O и отрезок AB, то существует единственная точка C луча l, такая, что $OC = AB$.

II.3. *Если точка C лежит внутри отрезка AB, а точка C_1 лежит внутри отрезка A_1C_1 и выполняются равенства $AC = A_1C_1$ и $CB = C_1B_1$, то $AB = A_1B_1$.*

II.4. *Для каждых двух отрезков AB и PQ существует отрезок AC, содержащий AB и составленный из конечного числа отрезков, равных PQ* (аксиома Архимеда, рис. 335).

Аксиомы II.1 и II.3 есть у Евклида (даже в более общей форме): равные одному и тому же равны между собой; и если к равным прибавить равные, то целые будут равны. А аксиома II.2 равносильна постулату Евклида о том, что из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг. Мы формулировали эти три аксиомы в § 1 «Геометрии-7». Необходимость аксиомы II.4, отсутствующей у Евклида, понял Архимед, который и сформулировал ее в своей работе «О шаре и цилиндре».

Единственная аксиома третьей группы была сформулирована создателем теории множеств немецким математиком Георгом Кантором (1845—1918).

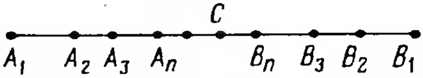


Рис. 336

III. **Аксиома непрерывности** (аксиома Кантора). *Если дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... и отрезок A_1B_1 содержит отрезок A_2B_2, отрезок A_2B_2 содержит отрезок A_3B_3 и вообще отрезок A_nB_n содержит отрезок $A_{n+1}B_{n+1}$, то существует точка C, принадлежащая всем этим отрезкам* (рис. 336).

Аксиомы первых трех групп можно назвать *линейными*, так как в них не присутствует представление о плоскости: они могли бы относиться к точкам и отрезкам, лежащим на одной прямой. Отметим, что линейные аксиомы позволяют обосновать измерение длин отрезков и ввести координату на любой прямой.

Аксиом о фигурах, не лежащих на одной прямой, всего четыре. Их можно разбить на две группы. Дадим такие определения.

Полуплоскостью, ограниченной прямой a, называется фигура, обладающая следующими свойствами:

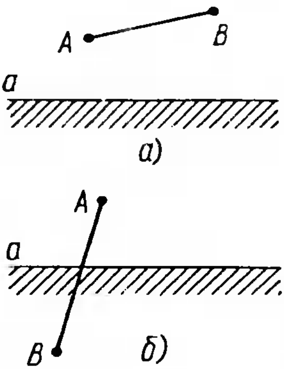


Рис. 337

1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней;

2) если точки A и B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет общих точек с a (рис. 337, a);

3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку (рис. 337, $б$).

Угол определим как пару лучей, имеющих общее начало и не лежащих на одной прямой. Определение **равенства углов** соответствует общему определению равенства фигур, данному во введении к главе 3. Со-

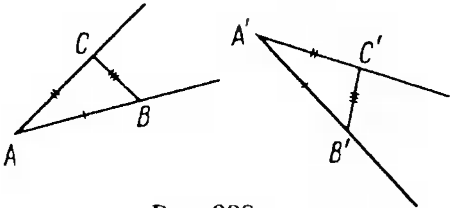


Рис. 338

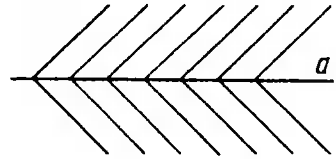


Рис. 339

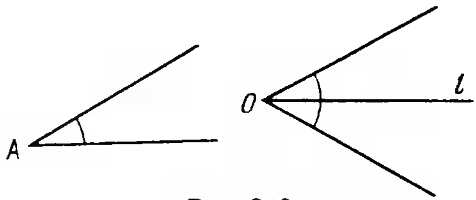


Рис. 340

ответственными на сторонах углов A и A' считаем такие точки B и B', что $AB = A'B'$ (рис. 338).

Теперь сформулируем аксиомы четвертой группы.

IV. **Аксиомы плоскости.**

IV.1. *Аксиома разбиения плоскости. Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, т. е. в объединении эти полуплоскости дают всю плоскость, а их пересечением является данная прямая* (рис. 339).

IV.2. *Аксиома откладывания угла. От каждого данного луча в данную сторону можно отложить угол, равный данному углу, и притом только один* (рис. 340).

IV.3. *Аксиома равенства углов. Если на сторонах углов A и A' найдутся такие соответственные точки B, C и B', C', что $ABC = A'B'C'$, то углы A и A' равны* (рис. 341).

Подробнее: если $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то для любых P, Q и P', Q' таких, что $AP = A'P'$ и $AQ = A'Q'$ выполняется равенство $PQ = P'Q'$. (Пары точек P, Q и P', Q' берутся на сторонах углов A и A' соответственно.)

Последняя группа содержит лишь одну аксиому.

V. **Аксиома параллельности Евклида.** *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит лишь одна прямая, не пересекающая данную прямую* (см. рис. 328).

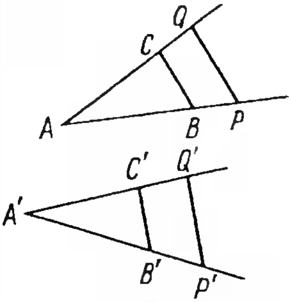


Рис. 341

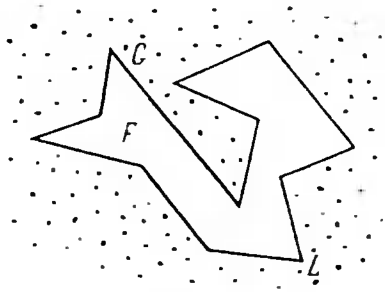


Рис. 342

19.3. Об уровне строгости школьного курса геометрии. После того как аксиоматика евклидовой планиметрии предъявлена, следовало бы вывести хотя бы основные теоремы планиметрии, опираясь на эту систему аксиом и не используя соображения наглядности. Конечно, в рамках школьного курса это невозможно, но в университетских курсах геометрии это делается. Например, такое построение планиметрии выполнено в книгах А. Д. Александрова «Основания геометрии» (М.: Наука, 1987), а также А. Д. Александрова и Н. Ю. Нецветаева «Геометрия» (М.: Наука, 1990). Но даже в университетских курсах не даются доказательства для многих наглядно очевидных утверждений. Например, утверждение о том, что простая замкнутая ломаная L разбивает плоскость на две части — ограниченный многоугольник F и неограниченную фигуру G, дополняющую F до всей плоскости (рис. 342), наглядно очевидно, но его доказательство не приводится даже в самых подробных курсах геометрии. Этот пример показывает, сколь сложен бывает переход от геометрической наглядности к логической строгости.

19.4. Три основные задачи аксиоматики. После того как предъявлена аксиоматика некоторой математической теории, возникает вопрос о непротиворечивости этой аксиоматики: не следуют ли из нее два взаимно исключающие друг друга утверждения? Впервые такой вопрос встал для геометрии Лобачевского. Проблема непротиворечивости геометрии Лобачевского была решена построением модели этой геометрии в рамках евклидовой геометрии. Итак, оказалось, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида.

До конца XIX в. сомнений в непротиворечивости евклидовой геометрии не возникало, ведь в ней речь шла об изучении свойств окружающего нас пространства, и это пространство и было реальной моделью ее аксиоматики. Но предложенная Гильбертом аксиоматика отвлечена от конкретной природы «вещей» — прямых, точек и плоскостей, — а потому необходимо было решить вопрос о ее непротиворечивости. В «Основаниях геометрии» Гильберт построил числовую модель аксиоматики евклидовой геометрии, считая точкой пару чисел (x, y), а прямой — линейное уравнение $ax + by + c = 0$ (с точностью до общего множителя). Тем самым ученый установил, что *евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива арифметика.*

Однако теория действительных чисел тоже нуждается в доказательстве непротиворечивости. Словом, ни в какой науке, даже в самой строгой математике, нет окончательной непротиворечивости, окончательной абсолютной истины.

Второй вопрос — о независимости аксиом: нет ли среди них лишних, которые можно было бы вывести из других. Классический пример такой задачи — проблема пятого постулата. Решать проблему независимости для каждой конкретной аксиомы из данной системы аксиом следует так же, как решалась проблема независимости аксиомы параллельности от остальных аксиом геометрии. Тогда проблема независимости некоторой аксиомы сведется к доказательству непротиворечивости новой аксиоматики, в которой данную аксиому заменили ее отрицанием, а все остальные аксиомы сохранили. И снова придется строить модель.

Наконец, третий, основной вопрос, касается полноты системы аксиом: действительно ли данная система дает основания соответствующей теории, все ли свойства пространства, которое рассматривается в теории, вытекают из аксиом? Вспомним, что систему аксиом Евклида пополняли более 2000 лет.

Гильберту удалось решить и проблему полноты: теперь имеется непротиворечивая полная система независимых аксиом элементарной геометрии, в которой подразумеваются только основные логические понятия.

Заключение

Итак, мы научились сравнивать фигуры, определять, равны они или нет, измерять длины, углы, площади, объемы всех основных фигур элементарной геометрии, строить разнообразные геометрические фигуры с заданными свойствами. Нам под силу решать многие важные для практики задачи, о которых рассказывалось в «Геометрии-7» (например, как найти высоту недоступного предмета или расстояние до него, как обеспечить параллельность рельсов и т. д.).

Но главное, что теперь планиметрия выстроена нами в строгой логической последовательности, в которой каждое новое предложение опирается на предшествующие. Параллельно с систематическим построением планиметрии мы вели обзорное изложение стереометрии. Аксиоматическое изложение стереометрии продолжится в X и XI классах.

В нашем курсе геометрии несколько уровней сложности. Первый уровень, который мы назвали гуманитарным, предполагает усвоение учащимися основных геометрических понятий, главных теорем и их доказательств. Второму уровню сложности соответствуют материалы о практическом применении геометрии, поэтому этот уровень мы условно назвали прикладным. Наконец, к третьему уровню относятся материалы, излагающие тонкости логического построения геометрии настолько, насколько это возможно в школьном курсе.

Мы надеемся, что вы полюбили геометрию: может быть, кому-то из вас ближе красота геометрических фигур, кому-то по душе ее практическая польза или логическая строгость. Хочется верить, что геометрия воспитала в вас потребность обосновывать свои суждения, склонность к анализу любых, даже очевидных, утверждений.

Желаем вам новых интересных встреч с геометрией!

Задачи

Слово к учителю

Задачи к каждому параграфу и, по возможности, к каждому пункту разбиты на три рубрики: **А**, **Б**, **В**.

В раздел **А** отнесены задачи, требующие самых несложных интеллектуальных операций: наблюдения, рисования фигур в соответствии с заданными условиями, простейших логических умозаключений.

В разделе **Б** находятся задачи разных видов: 1) содержащие сведения теоретического характера; 2) на работу с геометрическими величинами; 3) прикладные; 4) стереометрические.

Раздел **В** включает задачи, которые, не увеличивая набора основных геометрических фактов, позволяют увязать их между собой разными способами.

Разбиение задач по эти рубрикам достаточно условно, и при желании учитель может трактовать их по-своему.

ЗАДАЧИ К § 1

Вопросы для самоконтроля

? Как разложить данный вектор плоскости на составляющие по двум пересекающимся прямым?

Можно ли разложить данный вектор плоскости на составляющие по трем попарно пересекающимся прямым?

Может ли одна из составляющих ненулевого вектора быть нуль-вектором?

Что происходит с составляющими векторов при сложении этих векторов?

Как разложить данный вектор пространства на составляющие по трем прямым, среди которых нет параллельных?

А

1.1. На рис. 343 укажите составляющие для каждого вектора.

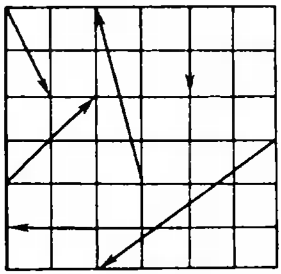


Рис. 343

1.2. Нарисуйте любые две пересекающиеся прямые. От точки их пересечения отложите любой вектор, не лежащий на данных прямых. Нарисуйте составляющие этого вектора по данным прямым. Затем нарисуйте любой вектор и проделайте ту же работу.

1.3. Нарисуйте любой вектор, начало и конец которого лежат в вершинах квадрата $ABCD$, а затем любые две прямые, проходящие через две его вершины. А теперь нарисуйте составляющие выбранного вектора по выбранным прямым.

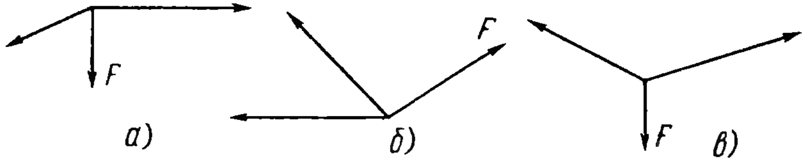


Рис. 344

Б

1.4. Направление юго-восток разложите на составляющие по двум таким направлениям: а) юг и восток; б) юго-запад и восток; в) юго-запад и юг.

1.5. а) Турист прошел на юго-запад 600 м. На какое расстояние он сместился на юг? на запад?

б) Турист прошел по азимуту 240° 1 км. На какое расстояние он сместился на юг и на запад?

1.6. Разложите указанную силу F на составляющие по указанным направлениям (рис. 344).

1.7. Некто поплыл на лодке через реку в пункт прямо напротив. Рассмотрим две составляющие его скорости — вдоль берега и перпендикулярно ему. Что происходит с этими составляющими при увеличении его собственной скорости? А при увеличении скорости течения?

1.8. Самолет летит из A в B и обратно. При каких условиях он совершит перелет быстрее: а) без ветра; б) при ветре, дующем все время от A к B; в) при ветре, дующем все время перпендикулярно AB; г) при ветре, дующем все время под острым углом к AB?

1.9. а) Если на туго натянутую нить надавить пальцем, то она лопнет. Можете ли вы объяснить, почему?

б) Буксир изо всех сил тянет баржу, а канат, соединяющий их, все равно провисает. Можете ли вы объяснить, почему?

1.10. Можете ли вы объяснить, каким образом яхта идет против ветра?

1.11. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите на составляющие векторы: а) $\overrightarrow{DA_1}$ по прямым DA и DD_1; б) $\overrightarrow{AB}$ по прямым AB и AA_1; в) $\overrightarrow{BD_1}$ по прямым BA, BC и BB_1; г) $\overrightarrow{CA}$ по прямым CB, CD и CC_1.

1.12. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть точка K — середина ребра B_1C_1, а точка L — середина ребра AD. Разложите на составляющие по прямым AB, AD, AA_1 векторы: а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{BL}$; в) $\overrightarrow{LC_1}$; г) $\overrightarrow{KL}$.

В

1.13. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Пусть точка K — середина стороны BC, точка M — середина стороны CD. а) Нарисуйте составляющие по прямым AB и AD векторов: $\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{DK}$; $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{KM}$. б) Нарисуйте составляющие по прямым AK и AM векторов: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{BM}$.

1.14. Может ли вектор образовывать со своей составляющей: а) прямой угол? б) тупой угол?

1.15. Чему равна вторая составляющая вектора $\vec{a}$, если первая его составляющая равна: а) $\vec{a}$; б) $\vec{0}$; в) $\frac{1}{4}\vec{a}$?

1.16. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом. а) Пусть $\vec{b}$ является составляющей вектора $\vec{a}$. Нарисуйте вторую его составляющую $\vec{c}$. б) Пусть $\vec{a}$ является составляющей вектора $\vec{b}$. Нарисуйте вторую его составляющую $\vec{d}$. Какое взаимное положение занимают векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$?

1.17. а) Может ли вектор равняться по длине одной своей составляющей? двум?

б) Может ли вектор быть длиннее одной из своих составляющих? двух?

в) Может ли вектор быть короче одной из своих составляющих? двух?

г) Пусть длина одной из двух составляющих вектора равна длине самого вектора. В каких границах лежит длина другой его составляющей?

1.18. Можно ли вектор длиной 10 разложить на две составляющие длиной 1? на две составляющие длиной 100? Попробуйте обобщить эту задачу.

1.19. а) Пусть известны длина вектора и углы с каждой составляющей. Как найти длины составляющих?

б) Пусть известны длины вектора и его составляющих. Как найти углы между вектором и его составляющими?

1.20. Дан единичный вектор. Со своими составляющими он образует равные углы. Чему равны длины этих составляющих, если данный угол между вектором и составляющими равен: а) 45°; б) 30°; в) 60°; г) φ?

1.21. Единичный вектор с одной из своих составляющих, длина которой равна 1, образует угол φ.

а) Какой угол он образует с другой своей составляющей?

б) Какова длина другой составляющей?

1.22. а) Нарисуйте два равных вектора. Разложите каждый из них по двум данным прямым. Сравните полученные составляющие. Как вы объясните полученные результаты? Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

б) Нарисуйте теперь два противоположных вектора одинаковой длины и проделайте такую же работу.

1.23. Если даны две пересекающиеся прямые a и b, то составляющие произвольного вектора $\vec{x}$ зависят от его положения. Выясните, при каком положении вектора $\vec{x}$: а) длина одной из составляющих наибольшая; б) длина одной из составляющих наименьшая; в) длины составляющих равны; г) длина одной из составляющих больше длины другой составляющей? Затем зафиксируйте одну из прямых и некоторый вектор. Составьте задачи для этой ситуации.

1.24. Как вы думаете, можно ли разложить данный вектор на составляющие по трем данным прямым? Какие особенности есть у такого разложения вектора?

ЗАДАЧИ К § 2

Вопросы для самоконтроля

Какой вектор называют единичным вектором оси?

Как найти проекцию вектора на ось?

В чем отличие проекции вектора от проекции отрезка?

Что происходит с проекциями векторов при их сложении? вычитании?

Что происходит с проекцией вектора при умножении вектора на число?

Как найти координаты вектора на плоскости?

Какими свойствами обладают координаты вектора?

Каковы свойства линейных операций с векторами?

Как вводится система координат в пространстве?

Как найти координаты точки в пространстве?

Как найти координаты вектора в пространстве?

Запишите формулу расстояния между двумя точками: а) на плоскости; б) в пространстве.

Для чего вводятся координаты вектора?

Основные задачи

2.1. а) Дан вектор $\vec{a}\,(x, y)$. Каковы координаты вектора $-\vec{a}$?

б) Даны векторы $\vec{a}\,(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$. Каковы координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$? Каковы координаты вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$?

2.2. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, φ_1 и φ_2 — углы, которые он составляет с осями координат. Докажите, что

$$\vec{a} = \cos\varphi_1\,\vec{i} + \cos\varphi_2\,\vec{j}.$$

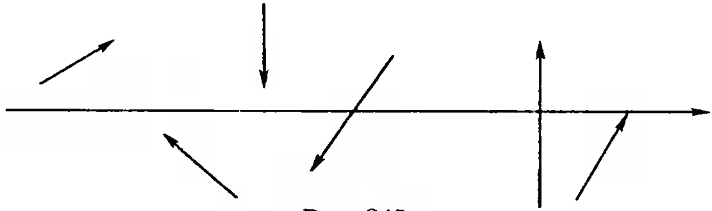


Рис. 345

2.3. а) Каждая из двух прямых задана координатами двух своих точек. Как выяснить, будут ли эти прямые параллельны? Приведите примеры.

б) Как выяснить, лежат ли три точки, заданные своими координатами, на одной прямой? Приведите примеры.

2.4. Пусть три точки, не лежащие на одной прямой, заданы своими координатами. Как установить вид треугольника с вершинами в данных точках? Приведите примеры.

2.5. Пусть известны координаты двух векторов. а) Как найти угол между ними? Приведите примеры. б) При каком соотношении между своими координатами векторы взаимно перпендикулярны?

2.6. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами. Как найти длину вектора $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$? Приведите примеры.

Задачи к пунктам 2.1, 2.2

A

2.7. На рис. 345 установите знак проекции вектора на ось.

2.8. Нарисуйте ось. Нарисуйте такой вектор, проекция которого на эту ось: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю.

2.9. Нарисуйте вектор. Нарисуйте такую ось, на которой проекция этого вектора: а) положительна; б) отрицательна; в) нулевая.

2.10. Нарисуйте ось. Нарисуйте вектор, проекция которого на эту ось равна: а) 1; б) –2.

2.11. Нарисуйте вектор. Нарисуйте ось, на которой проекция этого вектора: а) равна его длине; б) противоположна его длине; в) больше, чем его длина.

Б

2.12. а) Запишите формулу для вычисления проекции вектора на ось. Как найти из нее: длину вектора, угол между вектором и осью?

б) Зафиксируйте одну из величин: длину вектора, проекцию вектора на ось или угол между вектором и осью. Пусть другая из этих величин стала изменяться, например, увеличиваться. Что будет происходить с третьей?

в) В каких границах изменяется проекция вектора заданной длины при изменении угла с заданной осью?

г) В каких границах изменяется длина вектора, если задана его проекция на данную ось, а изменяется его угол с этой осью?

В

2.13. Вычислите проекцию единичного вектора на ось, если угол между вектором и осью равен а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 135°; е) 150°.

2.14. Проекция вектора на ось равна 1. Как изменяется длина этого вектора, когда угол между вектором и осью изменяется: а) от 0° до 45°; б) от 120° до 135°; в) от 60° до 120°; г) от φ_1 до φ_2?

2.15. В каких границах находится угол, который образует с осью единичный вектор, если его проекция на эту ось находится в границах: а) от 0 до 1/2; б) от −3/4 до −2/3; в) от −1/2 до 1/2?

2.16. а) Могут ли разные векторы иметь одну и ту же проекцию на данную ось?

б) Верно ли, что чем длиннее вектор, тем длиннее его проекция на данную ось?

2.17. а) Равны ли проекции вектора на параллельные оси?

б) Могут ли равняться проекции вектора на пересекающиеся оси?

в) Может ли проекция вектора на каждую из двух пересекающихся осей равняться нулю?

2.18. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1, а $\angle B = 30°$. Чему равны проекции: а) $\overrightarrow{AB}$ на ось CA; б) $\overrightarrow{AB}$ на ось CB; в) $\overrightarrow{BC}$ на ось CB; г) $\overrightarrow{BC}$ на ось CA; д) $\overrightarrow{AC}$ на ось BA; е) $\overrightarrow{BC}$ на ось BA.

2.19. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Чему равна проекция на ось AC вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CK}$, где точка K — середина AB?

Задачи к пункту 2.3

А

2.20. В системе координат с началом в точке O даны точки A (1, 0), B (0, 1), C (−1, 0), D (0, −1). Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$. Каковы его координаты? Проделайте такую же работу с другим вектором, у которого начало и конец находятся в данных точках.

2.21. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$, координаты которого: а) (2, 0); б) (0, −3); в) (1, 1); г) (−4, −2). Нарисуйте такой же вектор с началом в точке B, координаты которой (−1, −1).

Б

2.22. Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) A (0, 1), B (1, 0); б) A (−2, 1), B (−4, 2); в) A (−1, −3), B (−3, −1); г) A (p, q), B ($-p$, $-q$)?

2.23. В задаче 2.13 найдите обе координаты данного вектора при условии, что заданный угол он образует с осью x.

2.24. В условии задачи 2.14 пусть заданная ось — это ось x. Как изменяется вторая координата этого вектора?

2.25. Какой угол образует вектор с осями координат, если его координаты равны: а) (1, 1); б) (1, −1); в) (−1, 1); г) (−1, −1); д) (−2, 3)?

2.26. Каждая сторона треугольника ABC равна 2. Найдите координаты векторов $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$.

2.27. Пусть известны координаты точек A и B. Как, используя их, построить векторы: а) $\vec{OA} + \vec{OB}$; б) $\vec{OA} - \vec{OB}$?

Задачи к пункту 2.4

Б

2.28. а) Пусть известны длина вектора и одна из его координат. Как вычислить другую его координату или угол между этим вектором и осью x?

б) Пусть длина вектора равна 1, а одна из его координат равна 0,5. Чему равна другая его координата?

в) Пусть длина вектора равна 1, а одна из его координат изменяется от 1/3 до 1/2. Как изменяется другая его координата?

г) Одна из координат вектора изменяется от 1 до 1,1, а другая координата изменяется от 0,9 до 1. В каких границах лежит длина самого вектора? В каких границах лежит угол между этим вектором и осью x?

В

2.29. Дан вектор $\vec{a}\,(1, -1)$. Запишите координаты вектора: а) противоположного $\vec{a}$, б) $2\vec{a}$, в) $-3\vec{a}$.

2.30. Даны два вектора: $\vec{a}\,(1, -1)$ и $\vec{b}\,(-1, 1)$. Запишите координаты вектора: а) $\vec{a} + \vec{b}$, б) $\vec{a} - \vec{b}$, в) $-\vec{a} + \vec{b}$, г) $-\vec{a} - \vec{b}$, д) $2\vec{a} + 3\vec{b}$, е) $-1/2\vec{a} + 6\vec{b}$.

2.31. Используя условия задач 2.22 и 2.25, вычислите длины векторов.

2.32. Даны векторы $\vec{a}\,(1, -2)$ и $\vec{b}\,(-3, -1)$. Каковы координаты векторов: $2\vec{a}$; $-4\vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b}$; $-1/2\vec{a} + 2/3\vec{b}$? Чему равны длины этих векторов?

2.33. Пусть вектор $\vec{a}$ длиной 1 образует с осью x угол 30°, а вектор $\vec{b}$ длиной 1 образует с осью x угол 135°. Каковы координаты векторов: $2\vec{a}$; $-3\vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a}$?

2.34. Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе координаты?

2.35. Какие координаты имеют векторы: а) $\vec{i}+\vec{j}$; б) $-\vec{i}+\vec{j}$; в) $\vec{i}-\vec{j}$; г) $-\vec{i}-\vec{j}$; д) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; е) $1/2\vec{i}-3/2\vec{j}$ ($\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы осей координат)?

2.36. Коллинеарны ли векторы: а) (−2, 1) и (4, 2); б) (1, −3) и (1, 3); в) (3, −2) и (−3, 2); г) (1, 0) и (3, 0); д) (0, −1) и (1, 0); е) (0, 0) и (−2, 1)?

2.37. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Запишите их недостающие координаты: а) $\vec{a}$ (1, −2), $\vec{b}$ (3, ...); б) $\vec{a}$ (..., 2), $\vec{b}$ (4, −1); в) $\vec{a}$ (−2, ...), $\vec{b}$ (..., −2); г) $\vec{a}$ (−1, ...), $\vec{b}$ (2, ...).

2.38. От точки A отложили вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. а) Каковы координаты точки B, если A (1, 0), $\vec{a}$ (0, 1)? б) Каковы координаты точки A, если B (−2, − 1), $\vec{a}$ (−1, −2)?

2.39. Заданы точки A (−1, −3); B (2, −4); C (−3, −1); D (5, 2). Равны ли векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$? Вычислите координаты векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; в) $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}$; г) $-1/3\overrightarrow{CD}+3/2\overrightarrow{BA}$.

2.40. Пусть даны точки A (1, −1); B (2, 0); C (−1, 3). Найдите координаты точки D, если: а) $\overrightarrow{BD}\parallel\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{AB}$.

2.41. Пусть даны векторы $\vec{a}$ (−2, 1) и $\vec{b}$ (2, −3). а) Какой вектор длиннее: $\vec{x}=1/2\vec{a}-2\vec{b}$ или $\vec{y}=-3\vec{a}+1/2\vec{b}$? б) Какой угол больше: между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$?

2.42. Нарисуйте многоугольник $ABCDE$ с координатами вершин: A (1, 1), B (−1, 2), C (3, 2), D (3, −1), E (−1, −2). Вычислите: а) длину самой длинной его стороны, б) длину самой короткой его стороны, в) длину самой длинной его диагонали, г) длину самой короткой его диагонали, д) его углы, е) его площадь.

2.43. Дана точка A (−2, 3). Найдите координаты: а) какой-либо точки, удаленной от A на 1; б) точки на оси x, удаленной от A на 4; в) точки на оси y, удаленной от A на 5; г) точки на биссектрисе угла между осями координат, удаленной от A на 1.

Задачи к пункту 2.5

В

2.44. Упростите выражения: а) $5(-3\vec{a})$; б) $-2(-4\vec{x})$; в) $-3\vec{p}+2\vec{p}$; г) $4\vec{b}-2\vec{b}$; д) $2\vec{a}-2\vec{b}$; е) $1/4\vec{a}+3/4\vec{b}$.

2.45. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$.

2.46. В треугольнике ABC точка K — середина AC, точка L — середина AB, точка M — середина BC. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы: а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{BK}$; в) $\overrightarrow{CL}$; г) $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}$; е) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CL}+$ $+\overrightarrow{BK}$.

2.47. Вернитесь к условию задачи 2.41. а) Можно ли найти такое число α, чтобы $\alpha\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$? б) Можно ли найти такие числа α и β, что $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$? Если да, то чему они равны?

2.48. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы осей координат. Чему равны числа α и β, если: а) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}$; б) $\alpha\vec{i}+2\vec{j}=-3\vec{i}-\beta\vec{j}$; в) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}$; г) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=-3\vec{j}$; д) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$.

Задача к пункту 2.7

2.49. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты всех вершин куба и векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ в системе координат, если:
а) начало координат находится в точке A, а оси координат идут по лучам AB, AD, AA_1;
б) начало координат — в точке B, а оси — BA, BC и BB_1;
в) начало координат — в точке C_1, а оси — C_1B_1, C_1D_1, C_1C;
г) начало координат — в точке O, центре квадрата $ABCD$, а оси — OA, OD и OO_1, где точка O_1 — центр грани $ABCD$;
д) начало координат — в центре куба, а оси выберите сами.

ЗАДАЧИ К § 3

Вопросы для самоконтроля

С какой целью вводится понятие скалярного произведения векторов?

Как вычислить скалярное произведение двух векторов?

В каком случае скалярное произведение двух векторов равно нулю?

Какими свойствами обладает скалярное умножение векторов? Чем оно похоже на умножение чисел? А каковы различия в их свойствах?

Как, используя скалярное произведение, вычислить длину вектора? угол между векторами?

Как вычислить скалярное произведение двух векторов и с его помощью вычислить длину вектора и угол между векторами, если векторы даны в пространстве?

Основные задачи

3.1. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между векторами: а) острый; б) тупой? Сформулируйте и проверьте утверждения, обратные ответу.

3.2. Докажите, что скалярный квадрат вектора неотрицателен. При каком условии он равен 0?

3.3. Чему равен скалярный квадрат нулевого вектора? единичного вектора?

3.4. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых равны a и b, а угол между ними равен: а) 0°; б) 180°?

3.5. Что можно вычислить, зная: а) длины векторов и их скалярное произведение? б) скалярное произведение двух векторов и угол между ними?

Задачи к пункту 3.1

А

3.6. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\angle\vec{a}\,\vec{b}$ равен: а) 45°; б) 60°; в) 135°; г) 150°; д) 90°; е) 0°; ж) 180°.

3.7. Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\,\vec{b} = 3$; $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 1$; б) $\vec{a}\vec{b} = -2$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$; в) $\vec{a}\,\vec{b} = 7$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$; г) $\vec{a}\vec{b} = 1$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$; д) $\vec{a}\,\vec{b} = -1$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$.

Б

3.8. Запишите формулу скалярного произведения. а) Выразите из нее косинус угла между векторами, произведение длин векторов. б) Пусть длина одного из векторов увеличивается. Что происходит со скалярным произведением? в) Пусть начинает увеличиваться угол между векторами. Что происходит с их скалярным произведением? г) В каких границах находится скалярное произведение при изменении только угла между векторами? д) Напишите формулу для скалярного произведения двух коллинеарных векторов?

3.9. а) Скалярные квадраты двух векторов равны. Что из этого следует?

б) Пусть скалярный квадрат вектора увеличился. Что произошло с самим вектором?

в) Пусть координаты одного из векторов больше соответствующих координат другого вектора. Какой из векторов имеет больший скалярный квадрат?

В

3.10. Какие следствия можно получить из таких равенств: а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1/2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

3.11. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$; ж) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3.12. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Точка K — середина BC, точка M — середина AC. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BM}$; е) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{KM}$.

3.13. Докажите, что скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними.

3.14. Может ли вектор быть одновременно коллинеарен и ортогонален одному и тому же вектору?

3.15. Придумайте, как истолковать фразу «скалярный куб вектора». Какие можно получить отсюда следствия?

3.16. Пусть два вектора противоположны. Есть ли какая-либо зависимость между их скалярными квадратами?

3.17. Длина одного вектора в два раза больше длины другого. Как связаны их скалярные квадраты?

3.18. Рассмотрим скалярное произведение вектора $\vec{a}$ и единичного вектора $\vec{i}$ оси x. Докажите, что оно равно проекции вектора $\vec{a}$ на ось x. Какое аналогичное утверждение можно доказать? Докажите, что $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j}$, где $\vec{j}$ — единичный вектор оси y.

3.19. Можно ли найти векторы, зная их скалярные квадраты и угол между ними?

3.20. Пусть известны скалярные квадраты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$. Есть ли связь между этими величинами?

3.21. Верны ли равенства: а) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}$; б) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^2$?

3.22. Пусть три вектора имеют единичную длину. Известны скалярные произведения двух из них на третий вектор. Можно ли найти скалярное произведение первых двух векторов?

Задачи к пункту 3.2

А

3.23. Вычислите скалярное произведение векторов: а) (0, 3) и (−2, 0); б) (−5, 7) и (2, −1); в) (−3, 1) и (−1, −3).

Б

3.24. Докажите, что векторы (x, y) и $(-y, x)$ перпендикулярны. Укажите еще какой-нибудь вектор, перпендикулярный вектору (x, y).

3.25. Пусть два вектора имеют единичную длину. Запишите формулу для их скалярного произведения. Какие следствия можно получить из этой формулы?

В

3.26. Дан вектор $\vec{a} = (2, 3)$. а) Найдите координаты вектора, перпендикулярного $\vec{a}$. б) Найдите координаты единичного вектора, перпендикулярного $\vec{a}$.

3.27. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2)$ и $\vec{b} = (-2, 3)$. Вычислите: а) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot (-3\vec{b})$; в) $(-1/2\vec{a}) \cdot (1/3\vec{b})$; г) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$; д) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; е) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; ж) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

3.28. Пусть A (− 1, 2), B (−2, −3), C (1, 4), D (4, −2). Вычислите: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; в) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$.

3.29. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы. Вычислите: а) $\vec{i} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j})$; б) $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j}$; в) $(2\vec{i} + \vec{j}) \cdot (-3\vec{i} - \vec{j})$; г) $(-1/2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-1/2\vec{i} + \vec{j})$; д) $(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j})^2$.

3.30. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. а) Укажите такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{b} \perp \vec{a}$. б) Укажите такой вектор единичной длины.

3.31. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (−2, −3). Найдите единичный вектор, перпендикулярный ему.

3.32. Пусть $\vec{a} = (1, x)$, $\vec{b} = (1, y)$. При каком условии эти векторы: а) перпендикулярны; б) образуют острый угол; в) образуют тупой угол?

3.33. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1)$. Найдите вектор $\vec{c}$ такой, что: а) $|\vec{c}| = 1$ и $\angle\vec{c}\vec{a} = 30°$. (Какой угол он образует с $\vec{b}$?); б) $|\vec{c}| = 1$ и $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1$; в) $|\vec{c}| = 1$ и $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b}$; г) $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b}$ (могут ли эти произведения равняться 1?); д) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$ и $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2$.

3.34. Пусть $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также угол между ними.

3.35. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Найдите x, если: а) $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, x)$; б) $\vec{a} = (-3, x)$, $\vec{b} = (1, 0)$; в) $\vec{a} = (x, 0)$, $\vec{b} = (-2, -1)$; г) $\vec{a} = (0, 0)$, $\vec{b} = (x, 1)$; д) $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (1, x)$.

3.36. Докажите, что $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.

3.37. Как найти скалярное произведение двух векторов, зная: а) длины векторов и разность их длин; б) длины векторов и сумму их длин?

3.38. Пусть известны скалярные квадраты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$. Какая связь есть между этими величинами?

Задачи к пункту 3.3

Основная задача

3.39. Докажите, что: а) $(-\vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \cdot \vec{b})$; б) $\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = 1$.

3.40. Докажите равенства: а) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$; б) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$; в) $(x\vec{a}) \cdot (y\vec{b}) = (xy) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$; г) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

3.41. Преобразуйте выражения: а) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$; б) $(-1/2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-1/2\vec{a} - \vec{b})$; в) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$; г) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

3.42. Пусть $\vec{b} \perp \vec{a}$. Докажите, что $\vec{x} \cdot \vec{a} = (\vec{x} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$. Сделайте рисунок. Проверьте обратное утверждение.

3.43. Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$. Следует ли отсюда, что $\vec{b} = \vec{c}$?

3.44. Когда верны равенства: а) $(-\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (2\vec{b})$; в) $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$; г) $(\vec{a} + \vec{b})^2 =$

$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$; д) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}^2\vec{b}$; е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$; ж) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$?

3.45. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — единичные, $\angle \vec{a}\vec{b} = 30°$, $\angle \vec{b}\vec{c} = 60°$, $\angle \vec{a}\,\vec{c} = 45°$. Вычислите: а) $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; б) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; г) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

3.46. Вычислите угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a}$; в) $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$; г) $2\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} + 2\vec{b}$.

3.47. Докажите, что если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $x\vec{a} \perp y\vec{b}$. Верно ли обратное?

3.48. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ — единичные, а вектор $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Чему равен скалярный квадрат вектора $\vec{c}$?

3.49. Верно ли для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равенство: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$?

Задачи к пункту 3.4

Б

3.50. Вычислите угол между векторами: а) (1, 0) и (1, 2); б) (−2, 0) и (1, −1); в) (3, 2) и (2, 3); г) (−1, 2) и (2, −1); д) (0, 1) и (−1, −1).

3.51. Вернитесь к задаче 2.8. Вычислите: а) длины векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$; б) углы между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

В

3.52. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

3.53. $ABCD$ — четырехугольник. Докажите, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

ЗАДАЧИ К § 4

Вопросы для самоконтроля

? В чем состоит векторный метод решения задач?

Какие геометрические результаты получены векторным методом?

В чем преимущество векторного метода?

Что такое радиус-вектор точки?

Запишите векторное уравнение: а) прямой; б) отрезка.

Запишите радиус-вектор: а) середины отрезка AB; б) центра масс системы точек $A_1 A_2 \dots A_n$.

Задачи к пункту 4.2

В

4.1. Как записать на векторном языке о точках A и B, что они: а) совпадают; б) различны?

4.2. Как записать на векторном языке, что точка X лежит на: а) прямой AB; б) луче AB; в) отрезке AB? А как записать, что она не принадлежит этим фигурам?

4.3. Как записать на векторном языке о точке X и отрезке AB: а) X — середина AB; б) X делит его в отношении 1 : 2; в) X делит его в отношении $p : q$, считая от точки A.

4.4. Как записать на векторном языке, что: а) точки A, B, C являются вершинами треугольника; б) точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма?

4.5. Как записать на векторном языке, что точка X лежит в: а) полуплоскости, заданной прямой AB и точкой C; б) угле ABC; в) треугольнике ABC; г) параллелограмме $ABCD$?

4.6. Как записать на векторном языке, что прямые AB и CK: а) совпадают; б) параллельны; в) перпендикулярны?

4.7. Как записать на векторном языке об отрезках AB и CK, что: а) $AB = CK$; б) $AB = 2CK$; в) $AB > CK$?

4.8. Как записать на векторном языке, что угол ABC: а) прямой; б) острый; в) тупой?

4.9. Каков геометрический смысл векторных соотношений: а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK}$; б) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CT}$; в) $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{MA} = 0{,}5\overrightarrow{MK}$; д) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{KM} = \vec{0}$; з) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CE}|$?

4.10. Каков геометрический смысл векторных соотношений: а) $\overrightarrow{AB}^2 = 0$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$; в) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CE}|$; г) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CE}|$; д) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OK}^2$?

4.11. Дан треугольник ABC. Пусть точка K лежит на стороне AB, а точка M — на стороне AC. Пусть $AK : AB = AM : AC$. а) Докажите, что $KM \parallel BC$. б) Вычислите $KM : BC$. в) Изменятся ли полученные результаты, если точки K и M взять не на сторонах, а на их продолжениях как за точки B и C, так и за точку A? г) Сформулируйте аналогичную задачу для трапеции.

4.12. На сторонах треугольника ABC во внешнюю от него сторону построены параллелограммы $AKLB$, $BMNC$, $CPQA$ (порядок обхода вершин этих параллелограммов один и тот же). Можно ли составить треугольник из отрезков: а) LM, NP, QK; б) LP, MQ, NK? Обобщите эту задачу.

4.13. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

4.14. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

4.15. На сторонах треугольника ABC отложены единичные векторы: $\overrightarrow{AA_1}$ на AB, $\overrightarrow{BB_1}$ на BC, $\overrightarrow{CC_1}$ на CA. Возведите в квадрат сумму $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$. Используя неотрицательность этого квадрата суммы, получите неравенство для косинусов углов треугольника.

Задачи к пункту 4.3

В

4.16. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB}$ при любом выборе точки X.

4.17. Отметьте любые три точки A, B, C. Найдите точку X такую, что: а) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$; б) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC}$;

в) $\vec{XA} + \vec{XB} = \vec{AB}$; г) $\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} = \vec{0}$; д) $\vec{XA} + \vec{XB} - \vec{XC} = \vec{0}$.

4.18. Отметьте две точки A и B. Найдите точку X такую, что: а) $\vec{XA} = 3\vec{XB}$; б) $\vec{BX} = -2\vec{AX}$; в) $\vec{XA} + 2\vec{XB} = 3\vec{AB}$.

4.19. Пусть $ABCK$ — параллелограмм. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OK}$. Верно ли обратное утверждение? Будут ли верны эти утверждения, если точка O не лежит в плоскости параллелограмма?

4.20. Пусть $ABCP$ — тетраэдр. Докажите, что $\vec{AC} + \vec{BP} = \vec{AP} + \vec{BC}$. Можно ли обобщить эту задачу?

4.21. Пусть A, B, C, K — любые точки плоскости. Докажите, что $\vec{AB} \cdot \vec{CK} + \vec{AK} \cdot \vec{BC} - \vec{AC} \cdot \vec{BK} = 0$. Используя это равенство, докажите, что высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Будет ли это равенство верно для четырех точек пространства?

4.22. Запишите радиус-вектор точки X, которая: а) является серединой отрезка AB; б) делит отрезок AB в отношении $2 : 1$; в) лежит на прямой AB и при этом в 10 раз ближе к точке A, чем к точке B.

4.23. Пусть $ABCK$ — параллелограмм. Примем точку A за полюс, а векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AK}$ за базис. Запишите радиус-вектор: а) точки C; б) середины BC; в) середины CK; г) середины BK.

4.24. Дан треугольник ABC. Пусть точка A является полюсом, а векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ — базисом. Запишите теперь радиус-вектор: а) середины BC; б) точки K — конца биссектрисы AK; в) точки H — конца высоты AH.

4.25. Пусть точка C делит отрезок AB в отношении $p : q$, считая от точки A. Докажите, что $\vec{OC} = \frac{q}{p+q}\vec{OA} + \frac{p}{p+q}\vec{OB}$.

4.26. Пусть AB и CD — два отрезка, точка K делит отрезок AB в отношении $p : q$, считая от точки A, точка M делит отрезок CD в том же отношении, считая от точки C. Выразите $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Будет ли верно данное соотношение, если данные отрезки не лежат в одной плоскости? Проверьте обратные утверждения. Рассмотрите и вырожденный случай, когда один из данных отрезков вырождается в точку.

4.27. В треугольнике ABC проведены хорды BK и AM. При этом $AK = 1/3AC$, $BM = 1/3BC$. В каком отношении делятся отрезки AM и BK точкой P их пересечения? Лежит ли точка P на медиане к стороне AB? Обобщите задачу.

4.28. Пусть точка K лежит на стороне BA треугольника ABC, причем $BK = 1/3BA$, а точка M лежит на стороне BC, причем $BM = 1/2BC$. Пусть прямая KM пересекает прямую AC в точке P. а) В каком отношении делится точкой C отрезок AP? Обобщите полученный результат. б) В каком отношении делит прямая KM медиану BB_1? в) Обобщите задачу.

4.29. Вершина параллелограмма соединена отрезками с серединами противоположных сторон. В каком отношении эти отрезки делят диагональ, не проходящую через данную вершину? Как можно обобщить эту задачу?

4.30. Пусть прямые a и b параллельны, на прямой a лежит отрезок AB, на прямой b лежит отрезок CP. При этом $AB = 2CP$. Проведены отрезки AP и BC, пересекающиеся в точке X. CP движется по прямой b. а) По какой линии движется точка X? б) В каком отношении она делит отрезки AC и BP?

4.31. Как, используя скалярное произведение, найти в данном треугольнике длину медианы? биссектрисы?

Задачи к пункту 4.4

В

4.32. Точки O, A, B не лежат на одной прямой. Какую фигуру образуют все точки X такие, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$, где: а) $k \geqslant 0$; б) $k \leqslant 0$; в) $|k| \leqslant 1$; г) $|k| \geqslant 2$; д) $k \leqslant R$?

4.33. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарны. Какую фигуру образуют все точки X такие, что $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, где: а) $\alpha\beta \geqslant 0$; б) $\alpha\beta \leqslant 0$; в) $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant 1$; г) $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \geqslant 1$?

4.34. Из точки O выходят два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$. 1) Какую фигуру образуют все точки X такие, что: а) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; б) $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; в) $\alpha = 1$, $\beta \leqslant R$; г) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$; д) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 2$? 2) Какие ограничения нужно наложить на числа α и β, чтобы переменная точка X заполнила: а) треугольник AOB; б) параллелограмм; в) полосу?

4.35. Какую фигуру образуют концы всевозможных радиус-векторов вида $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$, где: а) точка X фиксирована, а точка Y лежит на отрезке AB; б) точка X лежит на одном из данных отрезков, а точка Y — на другом; в) точка X лежит в одном из данных треугольников, а точка Y — в другом?

4.36. Нарисуйте треугольник ABC. Какую фигуру образуют все точки X такие, что $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, где все коэффициенты при векторах неотрицательны, а их сумма равна 1?

Задачи к пункту 4.5

Середина отрезка

4.37. Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Обобщите это утверждение.

4.38. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

4.39. Как, используя векторы, построить треугольник, зная середины его сторон? А пятиугольник? А четырехугольник?

4.40. Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей. Как выглядит обобщение этого результата в пространстве?

4.41. Какой вид имеет четырехугольник, в котором точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения его средних линий?

4.42. В четырехугольнике $ABCK$ точка M лежит на AB, точка P лежит на CK, причем $AM : AB = KP : KC$. а) Докажите, что середины отрезков BC, AK, MP лежат на одной прямой. б) Докажите, что хорда MP делит полученную среднюю линию в том же отношении, что и стороны. Как можно обобщить полученные результаты?

Центр масс системы точек с равными массами

4.43. Пусть T_1 — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, а точка T_2 — точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$. Выразите $\overrightarrow{T_1T_2}$ через $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$.

4.44. Пусть T — точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка O — произвольная. Докажите, что $OT < 1/3(OA + OB + OC)$.

4.45. На стороне AB треугольника ABC взята точка C_1, на стороне BC — точка A_1, на стороне AC — точка B_1. При этом $AC_1 : AB = BA_1 : BC = CB_1 : CA$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. Проверьте обратное.

4.46. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Пусть T_1 — точка пересечения медиан треугольника ABC, T_2 — точка пересечения медиан треугольника BCD, T_3 — точка пересечения медиан треугольника CDA, T_4 — точка пересечения медиан треугольника DAB. Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и точка пересечения средних линий четырехугольника $T_1T_2T_3T_4$ совпадают. Как выглядит аналогичное утверждение в пространстве? В каком отношении делится точкой пересечения отрезок, соединяющий данную точку с противоположной точкой пересечения медиан?

4.47. Пусть T_1 — центр масс системы точек $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_k$, T_2 — центр масс системы точек $B_1B_2 \ldots B_n$, T_3 — центр масс всей системы данных точек. Докажите, что T_3 лежит на отрезке T_1T_2. В каком отношении точка T_3 делит этот отрезок? Какие следствия отсюда можно получить?

Центр масс системы точек с произвольными массами

4.48. Все материальные точки лежат на некоторой прямой. Докажите, что их центр масс лежит на той же прямой. Обобщите задачу, решив ее для точек, лежащих в пространстве.

4.49. Три материальные точки лежат в вершинах треугольника. Докажите, что их центр масс лежит внутри треугольника.

4.50. Используя понятие центра масс, докажите, что: а) медианы треугольника имеют общую точку и определите, в каком отношении они делятся этой точкой; б) верно утверждение, аналогичное а), для пространства; в) точка пересечения средних линий четырехугольника и середина отрезка, соединяющего середины его диагоналей, совпадают.

ЗАДАЧИ К § 5

Вопросы для самоконтроля

В чем состоит суть метода координат?

Кто создал метод координат?

Какие вы знаете уравнения прямой?

Какие вы знаете условия: а) параллельности прямых; б) совпадения прямых; в) перпендикулярности прямых?

Какие вы знаете уравнения окружности?

Каким условием задается в системе координат круг?

Что вы знаете об окружности Аполлония?

Как устроена полярная система координат?

Расскажите о пространственной системе координат.

Запишите уравнение в пространственной системе координат для: а) плоскости; б) сферы.

Какие вы знаете системы координат?

Задачи к пункту 5.3

Основная задача

5.1. Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), с угловым коэффициентом k является уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Б

5.2. а) Пусть прямая проходит через такие точки на осях координат: $(a, 0)$ и $(0, b)$. Напишите уравнение этой прямой.

б) Пусть прямая проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Напишите уравнение такой прямой.

5.3. а) Прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$. Дана точка A (x_0, y_0). Требуется узнать, в какой полуплоскости, ограниченной этой прямой, лежит данная точка. Как это сделать? Приведите численный пример.

б) Две прямые, заданные своими уравнениями, пересекаются. Дана точка A (x_0, y_0). Требуется узнать, в каком из углов, образованных данными прямыми, лежит точка A. Как это сделать? Приведите численный пример.

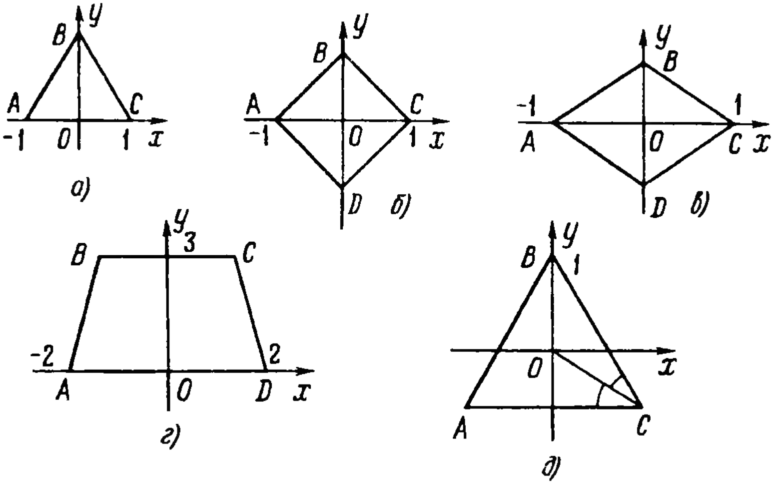


Рис. 346

В

5.4. Чему равен угловой коэффициент прямой, заданной уравнением: а) $y = 0{,}5x$; б) $x = 3y$; в) $y = -3x - 1$; г) $x = -2y + 1$; д) $-2x - 3y = 3$; е) $5x + 0{,}1y = -1$; ж) $y = -2$; з) $x = 3$?

5.5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2, -1)$ и имеющей угловой коэффициент: а) $1/3$; б) -2; в) 0.

5.6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(1, -1)$ и образующей с осью Ox угол: а) $30°$; б) $45°$; в) $90°$; г) $120°$.

5.7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $(0, 1)$ и $(-2, 3)$; б) $(5, 7)$ и $(5, -2)$; в) $(-1, 3)$ и $(-1, 10)$.

5.8. Дана точка $(3, -1)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через эту точку, и: а) параллельной оси x; б) параллельной оси y; в) параллельной прямой, уравнение которой $y = x + 1$; г) параллельной прямой, уравнение которой $2x + 3y + 1 = 0$; д) перпендикулярной прямой $y = x$.

5.9. Напишите уравнения прямых, проходящих через вершины многоугольников (рис. 346), если: а) $AB = BC =$

$= CA$; б) $ABCD$ — квадрат; в) $ABCD$ — ромб с углом 60°; г) $ABCD$ — трапеция, $AB = BC = CD$; д) $AB = BC = CA$.

5.10. Прямая задана своим уравнением. Как узнать: а) проходит ли она через начало координат; б) проходит ли она через данную точку; в) в каких точках она пересекает оси координат; г) на каком расстоянии от начала координат она проходит; д) на каком расстоянии от данной точки она проходит? Приведите примеры.

Задачи к пункту 5.5

В

5.11. а) Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 = 21$. Не рисуя систему координат, установите расположение относительно нее точек $A\ (-1,\ 3)$; $B\ (4,\ -5)$; $C\ (\sqrt{3},\ -\sqrt{2}\ )$; $K\ (0,\ \sqrt{21}\ )$.

б) Решите ту же задачу для окружности, заданной уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ и точек $A\ (-3,\ 0)$; $B\ (5,\ 0)$; $C\ (4,\ 2)$; $D\ (2,\ 7)$; $E\ (-4,\ 6)$; $K\ (3,\ 1)$; $L\ (-2,\ 3)$.

5.12. Напишите уравнение окружности: а) с центром в начале координат и радиусом 2; б) с центром $(-2,\ 1)$ и радиусом 3; в) с центром $(-3,\ 0)$ и проходящей через точку $(-4,\ 1)$.

5.13. Укажите центр и радиус окружности, заданной уравнением: а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + (y + 5)^2 = 4$; в) $(x - 2)^2 + y^2 = 3$; г) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$; д) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 1$; е) $x^2 + y^2 = a^2$.

5.14. Окружность задана уравнением $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$. Пересекает ли эта окружность: а) ось x; б) ось y; в) прямую $y = -x$; г) прямую $y = x + 2$; д) окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задачи к пункту 5.6

5.15. Нарисуйте фигуру, заданную уравнением: а) $x = 1$; б) $y = -3$; в) $x(x - 1) = 0$; г) $(y + 1)(y + 2) = 0$; д) $(x - 2)(y + 4) = 0$; е) $|x| = 1$; ж) $|y| = 2$; з) $(x - y)(x + y) = 0$.

5.16. Нарисуйте фигуру, заданную неравенством: а) $x \leqslant 5$; б) $y \geqslant -2$; в) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; г) $x(x-1) \geqslant 0$; д) $y^2 \leqslant 0$; е) $x^2 \geqslant 4$; ж) $xy \geqslant 0$; з) $(x-3)(y+2) \leqslant 0$; и) $(x+1)/(y-1) \geqslant 0$.

5.17. Нарисуйте фигуру, заданную условием: а) $x \leqslant y \leqslant 2x$; б) $-x \leqslant y \leqslant x$; в) $y \geqslant -x+1$, $y \leqslant x-1$, $x \leqslant 9$.

5.18. На координатной плоскости заданы точки A (−2, 0), B (0, 2), C (2, 0), K (0, −3). Запишите условия, которыми задаются: а) треугольник BOC (точка O — начало координат); б) треугольник ABC; в) треугольник BCK; г) четырехугольник $ABCK$.

5.19. Нарисуйте фигуру, заданную условием: а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; в) $x^2 + y^2 \geqslant 1$; г) $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$.

5.20. Точка A движется в системе координат по прямой $y = x$. Из нее проведен отрезок AB длиной 1 по одну сторону от прямой. Напишите уравнение линии, по которой движется точка B, если: а) $AB \parallel y$; б) $AB \parallel x$; в) прямая AB перпендикулярна данной прямой.

5.21. Напишите уравнение линии, по которой движется в системе координат точка K такая, что $KA = KB$, если: а) A (0, 0), B (4, 0); б) A (0, 3), B (0, −5).

5.22. По какой линии движется в системе координат точка K, если она равноудалена от: а) оси x и точки A (0, 2); б) оси x и точки B (0, −2); в) оси y и точки C (2, 0); г) оси y и точки K (−2, 0)?

5.23. По какой линии движется внутри прямого угла точка K такая, что сумма расстояний от нее до сторон угла равна 1?

5.24. Внутри прямого угла O со сторонами a и b движется точка K. По какой линии она движется, если: а) $|Ka| = |Kb|$; б) $|Ka| = 2|Kb|$; в) $|KO| = 2|Kb|$; г) $|KO| = 0{,}5|Ka|$?

5.25. а) Нарисуйте прямой угол с вершиной O. Нарисуйте несколько прямоугольников с периметром 12, две соседние стороны которых лежат на сторонах данного угла. На какой линии будет располагаться их вершина, не лежащая на сторонах данного угла?

Обобщите задачу считая, что периметр прямоугольника равен a.

б) Нарисуйте несколько прямоугольников, расположенных так же, как в задаче а), имеющих площадь, равную 12. На какой линии будет располагаться их вершина, не лежащая на сторонах данного угла?

Обобщите задачу.

5.26. Дан отрезок AB длиной 2. По какой линии движется точка K такая, что: а) $KA^2 - KB^2 = 1$; б) $KA^2 + KB^2 = 1$? Попытайтесь обобщить эти задачи.

Задача к пункту 5.7

В

5.27. Напишите уравнение линии, по которой движется в системе координат точка K такая, что $KA = 2KB$, если: а) A (0, 0), B (−3, 0); б) A (4, 0), B (1, 0); в) A (0, −4), B (0, −1).

Задачи к пункту 5.8

Б

5.28. Напишите в полярных координатах уравнение прямой, проходящей через начало координат.

В

5.29. Нарисуйте полярную систему координат. Найдите на ней такие точки: а) (1, 30°); б) (2, 135°); в) (3, 90°); г) (4, 270°).

5.30. Найдите полярные координаты точки, заданной в декартовой системе координат: а) (0, 1); б) (1, 0); в) (−1, 0); г) (0, −1); д) (1, 1); е) (1, −1); ж) (−1, 1); з) (−1, −1).

5.31. Найдите декартовы координаты точки, заданной в полярной системе координат: а) (1, 0°); б) (1, 90°); в) (2, 180°); г) (3, 270°); д) (4, 60°); е) (5, 120°); ж) (10, 210°); з) (20, 330°).

5.32. Найдите расстояние между точками: а) (1, 90°) и (1, 180°); б) (1, 45°) и (1, 225°); в) (1, 100°) и (1, 200°).

5.33. Нарисуйте фигуру, заданную таким уравнением в полярных координатах: а) $r = 0$; б) $r = 1$; в) $\cos \varphi = 0$; г) $\cos \varphi = 0{,}5$; д) $\cos \varphi = -1$; е) $\sin \varphi = 0$; ж) $\sin \varphi = 0{,}5$; з) $\sin \varphi = -1$.

5.34. Нарисуйте фигуру, заданную уравнением: а) $r = 1/\sin \varphi$; б) $r = \sin \varphi$; в) $r = \sin 2\varphi$; г) $r = \sin 3\varphi$; д) $r = 1/\cos \varphi$; е) $r = \cos \varphi$; ж) $r = \cos 2\varphi$; з) $r = \cos 3\varphi$.

5.35. Напишите в полярной системе координат уравнения таких линий: а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $y = x$; в) $y = -x$; г) $y = 1/x$; д) $x^2 + 2y^2 = 1$; е) $x^2 - y^2 = 1$.

5.36. Напишите в декартовой системе уравнения таких линий: а) $r = \operatorname{tg} \varphi$; б) $r = \operatorname{ctg} \varphi$; в) $r = (1 + \sin \varphi)/\cos \varphi$; г) $r = (1 - \sin \varphi)/\cos \varphi$; д) $r^2 = 2\cos 2\varphi$; е) $r^2 = 2\sin 2\varphi$.

Задачи к пункту 5.9

А

5.37. Нарисуйте пространственную систему координат. Нарисуйте точку, координаты которой таковы: а) (−1, 0, 0); б) (0, 1, 0); в) (0, 0, −1); г) (0, 1, 1); д) (−1, 0, 1); е) (1, −1, 0); ж) (1, 1, 1); з) (−1, −1, −1).

5.38. Нарисуйте пространственную систему координат. Нарисуйте плоскость, уравнение которой таково: а) $x = 1$; б) $y = -1$; в) $z = 1$; г) $x - y = 0$; д) $y + z = 0$; е) $x + y = 1$; ж) $x + y + z = 1$; з) $x + y - z = 0$.

В

5.39. Какая фигура в пространстве задается уравнением: а) $x^2 = 1$; б) $|y| = 1$; в) $|z - 1| = 1$; г) $xz = 0$; д) $xyz = 0$; е) $|x| = |y|$; ж) $x = y = z$; з) $|x| = |y| = |z|$?

5.40. Какая фигура в пространстве задается условием: а) $x \leqslant 0$; б) $y \geqslant 0$; в) $z \geqslant 1$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 2$; д) $|y| \geqslant 1$; е) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$?

5.41. Плоскость в пространстве задается уравнением $x - 2y + 3z = 10$. Лежит ли в этой плоскости начало координат? Какие из точек лежат в этой плоскости: A (−1, 2, 3); B (5, 2, 3); C (10, 100, 1000)?

5.42. Какое множество точек пространства задается таким условием: а) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$; б) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$.

5.43. Сфера в пространстве задается уравнением $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$. Какие из точек лежат на сфере: A (1, 1, −1); B (1, −1, 0); C (1/2, −1/2, −1/2)? Какие из заданных точек лежат внутри шара, ограниченного этой сферой, какие — вне этого шара?

5.44. Нарисуйте единичный куб: а) одна из вершин которого находится в начале координат, а три ребра лежат на положительных полуосях координат; б) центр которого находится в начале координат, а ребра параллельны осям.

Какими условиями задается: а) его поверхность; б) он сам? Каково уравнение описанной около этого куба сферы (проходящей через все его вершины)?

ЗАДАЧИ К § 6

Вопросы для самоконтроля

Какие возможны случаи взаимного расположения прямой и окружности?

Какая прямая называется касательной к окружности?

Какие вы знаете свойства касательной к окружности?

Какие вы знаете признаки касательной к окружности?

Какая связь существует между вписанным углом и дугами окружности?

Какие вы знаете свойства вписанных углов?

Какие возможны случаи взаимного расположения двух окружностей?

Какие окружности называются концентрическими?

Какие вы знаете признаки касания двух окружностей?

Какие вы знаете признаки пересекающихся окружностей?

Какие возможны случаи взаимного расположения сферы и плоскости?

Какая плоскость называется касательной к сфере?

Какие вы знаете свойства плоскости, касательной к сфере?

Какие вы знаете признаки касания плоскости и сферы?

Какие возможны случаи взаимного расположения двух сфер?

Какая прямая является опорной для плоской фигуры?

Какая плоскость является опорной для неплоской фигуры?

Какие возможны случаи взаимного расположения на плоскости прямой и ограниченной фигуры?

Какие возможны случаи взаимного расположения в пространстве плоскости и ограниченной фигуры?

Задачи к пункту 6.1

А

6.1. На сколько частей разбивают плоскость окружность и прямая?

6.2. Нарисуйте окружность и касательную к ней. Нарисуйте еще одну касательную, пересекающую первую. Нарисуйте еще несколько пар пересекающихся касательных. На какой линии располагаются точки пересечения всех таких касательных?

6.3. Какую фигуру образуют центры окружностей: а) касающихся данной прямой в данной на ней точке; б) касающихся данной прямой и равных между собой?

6.4. Нарисуйте два круга, не имеющих общих точек. Нарисуйте прямую, которая касалась бы окружностей этих кругов. Сколько таких общих касательных вы нарисовали? Можно ли нарисовать их больше?

Б

6.5. Колесо перемещается по прямой. По какой линии движется его центр?

6.6. Известна древняя история о том, как мореплаватели узнавали, близко ли земля. Они выпускали с корабля птицу, и если она возвращалась, значит, берег был далеко. Какую информацию можно получить, если птица не возвратится?

6.7. Постройте две прямые. Постройте линию их сопряжения (то есть дугу окружности, которая касается каждой из них). Сможете ли вы это сделать, если на одной из них будет зафиксирована точка касания?

В

6.8. Как построить касательную из данной точки к данной окружности? Сколько таких касательных можно построить? Докажите, что они будут равны.

6.9. Как построить касательную к двум данным окружностям? Будут ли среди них равные?

6.10. Нарисуйте окружность с центром в точке O. Нарисуйте ее диаметр AB. Нарисуйте касательную, проходящую через точку A. Отметьте на ней точку X.

а) Пусть $OA = 1$, $XA = 2$. Вычислите XO. б) Составьте обратные задачи.

6.11. Нарисуйте окружность и ее диаметр. Проведите касательные к данной окружности через концы этого диаметра. Докажите, что эти касательные параллельны.

6.12. Нарисуйте окружность, а в ней хорду. Нарисуйте касательную к этой окружности, параллельную данной хорде. Пусть известны радиус окружности и длина хорды. Как вычислить расстояние между ними? Приведите численный пример. Составьте обратные задачи.

6.13. а) Две окружности касаются одной и той же прямой в одной и той же точке. Укажите их наиболее удаленные точки. Докажите справедливость вашего решения.

б) Две равные окружности касаются одной и той же прямой в разных точках. Укажите их наиболее близкие и наиболее удаленные точки. Докажите справедливость вашего выбора. Выполните то же задание при условии, что эти две окружности не равны.

6.14. Нарисуйте два круга, не имеющих общих точек. Нарисуйте касательную, общую для их окружностей. а) Сколько таких касательных можно нарисовать? б) Какое положение они занимают, если круги равны? в) Нарисуйте точки пересечения этих касательных. Можно заметить, что какие-то из них лежат на линии центров данных кругов (прямой, проходящей через их центры). Какие? Чем это объясняется?

Задачи к пункту 6.2

А

6.15. На сколько частей разбивает плоскость окружность и угол?

6.16. Нарисуйте угол. Нарисуйте несколько окружностей, касающихся его сторон. Как расположены центры этих окружностей?

Б

6.17. В круге проведена хорда. Рассмотрим такие величины: R — радиус круга, d — длина хорды, h — расстояние от центра круга до хорды и φ — угол, под которым хорда видна из центра. а) Пусть известны R и h. Как найти d и φ? б) Выберите любые две из этих величин. Пусть они известны. Как найти остальные? Приведите численные примеры. в) Пусть R —величина фиксированная и нам требуется выразить d в зависимости от h. Получите соответствующую формулу. г) Составьте задачи, аналогичные задаче пункта в).

6.18. Из точки A проведены к окружности радиуса R с центром O две касательные. Они касаются окружности в точках B и C. Обозначим угол BAC через φ, OA через a, BC через d, AB через b. а) Пусть известны R и a. Как найти остальные величины? б) Выберите любые две из этих величин. Пусть они известны. Как найти остальные? Приведите численные примеры. в) Пусть R — величина фиксированная и нам требуется выразить d в зависимости от φ. Получите соответствующую формулу. г) Составьте задачи, аналогичные задаче пункта в).

6.19. В окружности с центром O проведена хорда AB. Через точку A проведена касательная AC к этой окружности. Чему равен острый угол BAC, если угол AOB равен: а) 50°; б) 90°; в) 130°; г) φ? Какой вывод можно получить, решив эту задачу?

6.20. По окружности на земле расставлены столбы на равных расстояниях друг от друга. Известны радиус круга и расстояние между соседними столбами. Как вычислить расстояние между столбами, идущими через один? между любыми столбами?

В

6.21. В окружности радиуса 3 проведена хорда. На каком расстоянии она находится от центра и под каким углом видна из центра, если длина хорды равна: а) 1; б) 2; в) 3? Как изменяются эти величины с увеличением длины хорды?

6.22. В окружности радиуса 1 проведена хорда. Какова ее длина и расстояние от центра, если она видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°? Объясните, почему с увеличением этого угла длина хорды увеличивается, а расстояние до центра уменьшается. При каком угле длина хорды равна: 1, больше 1, меньше 1? Может ли длина хорды быть меньше 0,01?

6.23. Пусть AB — хорда окружности радиуса 2 с центром O, а x — расстояние от центра до хорды. Выразите площадь треугольника OAB как функцию от x. Вычислите ее значение при $x = 1$.

6.24. Пусть угол между двумя радиусами одной окружности известен. Как найти угол между двумя касательными к этой окружности, проведенными через концы этих радиусов?

6.25. Нарисуйте дугу окружности. Как разделить ее пополам?

Задачи к пункту 6.3

А

6.26. Как вычислить величины дуг окружностей на рис. 347?

6.27. Вычислите неизвестный угол на рис. 348.

6.28. Объясните, почему точки A, K, C, L лежат на одной окружности (рис. 349).

Б

6.29. В окружности радиуса R вписанный угол величиной φ опирается на хорду длиной d. а) Докажите, что $d = 2R \sin \varphi$. б) Что происходит с хордой данной окружности при увеличении величины угла? в) Что происходит с углом, вписанным в данную окружность, при

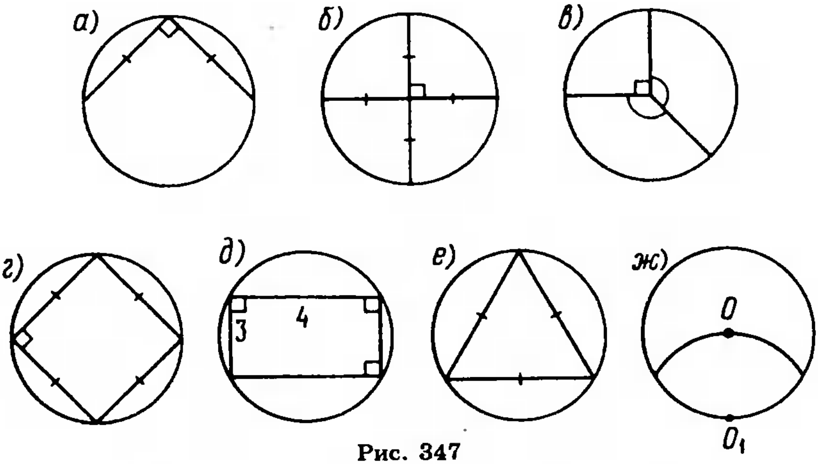


Рис. 347

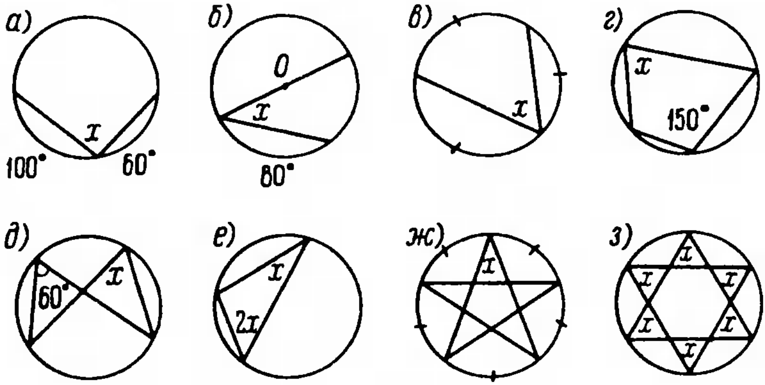


Рис. 348

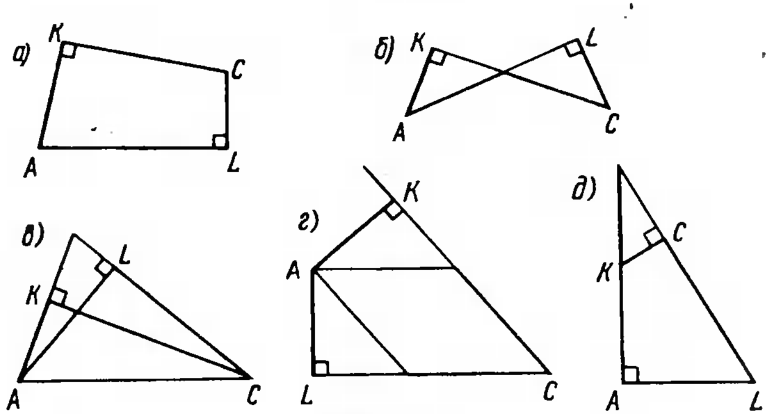


Рис. 349

увеличении хорды? г) Что происходит с радиусом окружности, проходящей через концы данной хорды, при изменении угла φ?

6.30. Найдите множество точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом. Обратите внимание на случай прямого угла.

6.31. Нарисуйте окружность. Отметьте на ней точки A, B, C. Чему равны величины дуг окружностей?

6.32. Пластинка имеет форму сегмента круга. Как вычислить его радиус?

6.33. С корабля видны три пункта на земле. Как использовать это для нахождения местоположения корабля на карте?

Р

6.34. На окружности отмечены точки A, B, C. В треугольнике ABC $\angle A = \varphi$, $\angle B = 2\varphi$. Чему равны дуги окружности?

6.35. На окружности отмечены две точки A и B. На одной из двух полученных дуг взята точка X, а на другой — точка Y. а) Как, зная угол AXB, вычислить угол AYB? б) Пусть один из этих углов увеличивается. Что при этом будет происходить с другим углом?

6.36. Точка C лежит на окружности диаметра AB, точка C_1 — проекция точки C на прямую AB. Рассмотрим такие величины: R — радиус окружности, CC_1, AC, BC, AC_1, BC_1. Выберите любые две из этих величин как известные и попробуйте найти остальные.

6.37. На окружности радиуса 2 взята точка A. а) Вычислите длину хорды этой окружности, если она видна из A под углом 30°; 90°; 120°. б) Под каким углом видна из точки A хорда длиной 1; длиной 2; длиной 3?

6.38. Под каким углом видна из точки на окружности радиуса R хорда, равная: а) R; б) $R\sqrt{2}$; в) $R\sqrt{3}$; г) $2R$; д) $\frac{3}{2}R$?

Задачи к пункту 6.4

А

6.39. а). На сколько частей разбивают плоскость две окружности?

б) На сколько частей разбивают плоскость три окружности?

6.40. Нарисуйте окружность. Сколько таких же окружностей можно расположить на плоскости так, что каждая из них касается двух других и данной?

6.41. Нарисуйте две концентрические окружности. Нарисуйте третью, которая касается первых двух. Сколько таких окружностей вы сможете нарисовать? Как построить данную окружность?

6.42. Нарисуйте окружность, которая касается другой окружности изнутри. Нарисуйте такую окружность, которая касается первых двух, но не в их общей точке. Сколько таких окружностей можно нарисовать? Как построить одну из них? Пусть каждая новая окружность касается не только двух данных, но и вновь нарисованной. Сколько таких окружностей можно нарисовать? Можно ли их построить?

6.43. Решите задачу, аналогичную 6.42, но только для двух окружностей, касающихся снаружи.

6.44. Можно ли нарисовать четыре окружности так, что каждая из них касается трех других?

6.45. Нарисуйте три равные окружности так, что каждые две из них касаются,— получился как бы «треугольник из окружностей». Можно ли составить какой-либо другой «треугольник из окружностей», взяв другое число равных окружностей? Определите число необходимых для этого равных окружностей.

6.46. Две окружности касаются. Укажите наиболее удаленные точки этих окружностей.

Б

6.47. Две окружности касаются. Установите связь между радиусами и расстоянием между их центрами. Изучите полученную формулу.

6.48. Нарисуйте две параллельные линии и отметьте на каждой из них по точке. Нарисовать одну дугу сопряжения, проходящую через эти точки, вообще говоря, вам не удастся (почему?). Можно ли построить две дуги сопряжения этих прямых, касающиеся между собой?

6.49. Можете ли вы нарисовать знаменитую восточную фигуру, которая называется «инь — ян»? А построить ее?

6.50. а) Одна окружность катится по другой. По какой линии движется ее центр?

б) Пусть эти окружности равны. Сколько оборотов сделает катящаяся окружность, пока вернется в прежнее положение?

В

6.51. Две окружности пересекаются. Известны их радиусы. Можно ли найти длину их общей хорды?

6.52. а) Чему равно расстояние между центрами двух касающихся окружностей, радиусы которых 2 и 3?

б) Чему равно расстояние между наиболее удаленными их точками?

6.53. Радиусы двух окружностей 2 и 4. Как расположены окружности, если расстояние между их центрами равно: а) 7; б) 6; в) 5; г) 4; д) 3; е) 2; ж) 1?

6.54. Докажите, что две окружности на плоскости имеют единственную общую касательную тогда и только тогда, когда они касаются между собой.

6.55. Вокруг точки O вращаются две точки: X по окружности радиуса R и Y по окружности радиуса r. В каких границах находится расстояние между этими точками?

6.56. а) Пусть у нас имеются круги любых, но разных радиусов. Мы хотим выложить вокруг одного из них не содержащий пробелов «венок» из нескольких других, не перекрывающихся между собой кругов. Нарисуйте такой «венок» из трех кругов, из четырех кругов. Сколько при этом может быть получено разных «венков»?

б) Ответьте на те же вопросы при условии, что среди кругов есть равные.

Задача к пунктам 6.5, 6.6

6.57. Выберите из задач к этому параграфу задачу про окружность. Составьте аналогичную задачу про сферу. Попытайтесь ее решить. Сколько вы нашли таких задач?

Задачи к пункту 6.7

А

6.58. Нарисуйте треугольник и для него опорную прямую, проходящую через: а) его вершину; б) его сторону; в) произвольную точку. Сколько таких прямых можно провести?

6.59. Нарисуйте окружность и для нее опорную прямую, проходящую через: а) точку на ней; б) точку вне ее. Сколько таких прямых можно провести?

6.60. Нарисуйте фигуру, которая: а) имеет бесконечно много опорных прямых; б) не имеет ни одной опорной прямой; в) имеет ровно одну опорную прямую; г) имеет ровно 10 опорных прямых; д) имеет опорную прямую только в одной своей точке; е) не имеет опорных прямых только в одной своей точке; ж) в каждой точке, в которой имеет опорную прямую, имеет их бесконечное множество.

Б

6.61. Наибольшее расстояние между параллельными опорными прямыми фигуры называется ее диаметром.

Назовите фигуру, у которой: а) есть диаметр; б) нет диаметра. Нарисуйте фигуру, имеющую диаметр. Можете ли вы его вычислить, если заданы все размеры, определяющие выбранную вами фигуру? Приведите численный пример.

6.62. Наименьшее расстояние между параллельными опорными прямыми фигуры называется ее шириной. Назовите фигуру, у которой: а) есть ширина; б) нет ширины. Нарисуйте фигуру, имеющую ширину. Можете ли вы ее вычислить, если заданы все размеры, определяющие выбранную вами фигуру? Приведите численный пример.

6.63. Может ли диаметр фигуры равняться ее ширине?

ЗАДАЧИ К § 7

Вопросы для самоконтроля

Какие вы можете дать определения выпуклому многоугольнику?

Приведите примеры выпуклых многоугольников.

Какие вы знаете свойства выпуклых многоугольников?

Какая фигура называется выпуклой? невыпуклой?

Какие вы знаете примеры выпуклых фигур? невыпуклых?

Какие вы знаете свойства выпуклых фигур?

Какая фигура называется ограниченной? неограниченной? Приведите примеры тех и других фигур.

Какая точка фигуры называется граничной точкой? внутренней точкой?

Какая прямая является опорной для данной фигуры?

Задачи к пункту 7.1

А

7.1. Нарисуйте квадрат $ABCD$. На диагонали AC выберите точку X так, чтобы четырехугольник $ABXD$ был: а) выпуклым; б) невыпуклым. При каком положении точки X на прямой AC многоугольник $ABXCD$ будет выпуклым? невыпуклым?

7.2. Нарисуйте любые пять точек. Выберите из них четыре так, чтобы они были вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько таких четырехугольников может получиться?

7.3. Нарисуйте любые пять точек. а) Нарисуйте наименьший выпуклый n-угольник, который их содержит. (Наименьший — значит, не содержащий в себе другого такого же.) Какой по виду многоугольник получился? б) Можно ли получить такой же многоугольник с меньшим числом сторон? в) Решите такую же задачу для шести точек.

7.4. Нарисуйте какой-нибудь выпуклый многоугольник. Разбейте его на треугольники: а) диагоналями, выходящими из одной вершины; б) отрезками, соединяющими его вершины с точкой внутри него. Можно ли таким же образом разбить невыпуклый многоугольник?

7.5. Диагональ, проведенная из некоторой вершины выпуклого многоугольника, лежит внутри него. Справедливо ли это утверждение для невыпуклого многоугольника? Может ли быть такое, что любая диагональ, проведенная из некоторой вершины многоугольника, не лежит в нем? Сколько таких вершин может быть в пятиугольнике?

7.6. Могут ли на диагонали многоугольника лежать три его вершины? четыре? Какое наибольшее число вершин многоугольника может лежать на одной и той же диагонали?

7.7. Может ли на диагонали многоугольника лежать его сторона? две его стороны? Какое наибольшее число сторон многоугольника может лежать на одной и той же его диагонали?

7.8. На сколько частей могут разбить плоскость границы двух четырехугольников: а) выпуклых; б) невыпуклых?

7.9. Нарисуйте три точки, а затем выпуклую фигуру, на границе которой лежат эти точки. Сколько таких фигур можно нарисовать? Есть ли среди них наименьшая? наибольшая?

Б

7.10. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника? невыпуклого?

7.11. Лучом прожектора можно осветить границу выпуклого многоугольника из каждой внутренней его точки. Можно ли это сделать с невыпуклым многоугольником?

7.12. Крепость имеет вид выпуклого пятиугольника. Снаружи для ее освещения ставятся прожекторы. Сколько для этого понадобится прожекторов? А сколько понадобится прожекторов, если у крепости будет вид невыпуклого пятиугольника?

В

7.13. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника? невыпуклого?

7.14. Сколько острых углов может быть в выпуклом n-угольнике? в невыпуклом?

7.15. Сколько получится треугольников, если выпуклый n-угольник разбить на треугольники непересекающимися диагоналями?

7.16. Каждая прямая, проходящая через две соседние вершины выпуклого многоугольника, не разбивает его на многоугольники и хотя бы одна такая прямая разбивает на многоугольники невыпуклый многоугольник. Могут ли все такие прямые разбивать невыпуклый многоугольник таким образом? Если нет, то каково наибольшее число таких прямых? (Для начала разберитесь с пятиугольником.)

7.17. Найдется ли такой многоугольник, что каждая прямая, проходящая через его сторону, содержит еще одну его сторону?

ЗАДАЧИ К § 8

Вопросы для самоконтроля

Около каких многоугольников можно описать окружность? А около каких нельзя?

Как найти центр окружности, описанной около многоугольника?

Может ли центр описанной около многоугольника окружности лежать вне многоугольника? на стороне многоугольника?

По какой формуле можно определить радиус окружности, описанной около треугольника?

Как можно вычислить радиус окружности, описанной около многоугольника?

Около каких четырехугольников можно описать окружность и около каких нельзя?

В какие многоугольники можно вписать окружность? А в какие нельзя?

Как найти центр окружности, вписанной в многоугольник?

По какой формуле можно найти радиус окружности, вписанной в многоугольник?

В какие четырехугольники можно вписать окружность? А в какие нельзя?

Приведите примеры многогранников, около которых можно описать сферу и около которых нельзя описать сферу.

? Приведите примеры многогранников, в которые можно вписать сферу и в которые нельзя вписать сферу.

Задачи к пункту 8.1

Б

8.1. Как построить многоугольник, около которого можно описать окружность, если он: а) пятиугольник, у которого пять равных сторон и два соседних угла — прямые; б) пятиугольник, у которого все стороны равны; в) пятиугольник, у которого все углы равны; г) пятиугольник, составленный из трех равных равнобедренных треугольников; д) шестиугольник, у которого все стороны равны; е) шестиугольник, у которого все углы равны; ж) шестиугольник, который составлен из двух равнобоких и равных трапеций?

В

8.2. Можно ли описать окружность около многоугольника, вершинами которого являются вершины двух: а) равносторонних треугольников с общим центром; б) квадратов с общим центром?

Задачи к пункту 8.2

А

8.3. Нарисуйте окружность и вписанный в нее треугольник: а) остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный.

8.4. Нарисуйте равнобедренный треугольник. Опишите около него окружность при условии, что данный треугольник: а) остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный. В каждом случае установите положение центра описанной окружности относительно данного треугольника.

Б

8.5. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник. Пусть его высота, проведенная из вершины, равна h, ее продолжение до окружности — d, основание — a, боковая сторона — b. а) Докажите, что $b^2 = 2Rh$. Выразите из этой формулы R. Как изменяется R в зависимости от h, если считать величину b постоянной? б) Докажите, что $a^2 = 4dh$.

8.6. Пусть a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что $S = \frac{abc}{4R}$. Какие следствия можно получить из этой формулы?

8.7. Сможете ли вы восстановить: а) равносторонний треугольник, если на рисунке от него остался центр описанной окружности; б) равнобедренный треугольник, если на рисунке от него остались центр описанной окружности и боковая сторона; в) равнобедренный треугольник, если от него на рисунке остались центр описанной окружности и основание; г) прямоугольный треугольник, если на рисунке от него остались центр описанной окружности и вершина прямого угла?

В

8.8. В равнобедренном треугольнике ABC основание $BC = 4$ см. Постройте окружность, описанную около этого треугольника, если $\angle A$ равен: а) 30°; б) 90°; в) 150°. Какое предположение можно сделать о расположении центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в зависимости от величины угла при вершине? Проверьте это предположение при других данных величинах. Докажите это предположение.

8.9. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC = a$, боковой стороной b, высотой $AD = h$. Вычислите стороны треугольника, если: а) $R = 1$, $\angle A = 30°$; б) $R = 1$, $\angle A = 120°$; в) $R = 2$, $h = 1$.

8.10. а) Вычислите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса 1.

б) Вычислите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1.

в) Установите зависимость между стороной равностороннего треугольника, равной a, и радиусом R описанной около него окружности.

8.11. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, если: а) его основание равно 2, а боковая сторона равна 3; б) основание равно 1, а угол при вершине равен 30°; в) угол при вершине равен 120°, а высота на боковую сторону равна 1; г) площадь равна S, а угол при основании равен φ.

8.12. В окружность радиусом 1 вписан равнобедренный треугольник. Чему равна его площадь, если: а) боковая сторона равна 1; б) высота равна 1; в) основание равно 1; г) основание равно x; д) сторона равна $2a$?

8.13. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, у которого: а) стороны равны 6, 8, 10; б) $c = 2$, $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$; в) $a = 3$, $b = 4$, $\angle C = 60°$.

Задачи к пункту 8.3

Б

8.14. Докажите, что можно описать окружность около: а) прямоугольника; б) равнобокой трапеции. Верны ли обратные утверждения?

8.15. Понадобилась доска шириной 20 см и толщиной 2 см. Каков наименьший диаметр бревна, из которого можно выпилить такую доску?

8.16. У тонкого конца бревно имеет диаметр 450 мм. Из него нужно выпилить доски шириной 360 мм и толщиной 30 мм. Сколько получится досок?

В

8.17. Как вычислить радиус окружности, описанной около равнобокой трапеции, если в трапеции известны: а) все стороны; б) два основания и диагональ; в) основание, боковая сторона и угол между ними; г) основание и угол, под которым оно видно из вершины другого основания; д) диагональ и угол, под которым она видна из противоположной вершины?

Задачи к пункту 8.4

Б

8.18. Докажите, что можно вписать окружность в: а) квадрат; б) ромб.

8.19. Можно ли построить многоугольник такого вида, который указан в условии задачи 8.1 и в который можно вписать окружность?

В

8.20. Можно ли вписать окружность в многоугольник, который является пересечением двух: а) равносторонних треугольников с общим центром; б) квадратов с общим центром?

Задачи к пункту 8.5

В

8.21. а) Чему равен радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 1?

б) Чему равна сторона равностороннего треугольника, описанного около окружности, радиус которой равен 1?

в) Установите зависимость между радиусами окружностей, вписанной в равносторонний треугольник и описанной около него.

8.22. Как вычислить радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, у которого известны: а) катеты; б) гипотенуза и острый угол; в) площадь и острый угол; г) периметр и острый угол?

8.23. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a, углом при основании β, высотой на основание h и площадью S, если: а) $a = 1$, $h = 2$; б) $a = 1$, $\alpha = 30°$; в) $h = 4$, $\beta = 30°$; г) $S = 6$, $\alpha = 120°$; д) $\beta = 30°$, $h = 2$.

8.24. В треугольник вписана окружность. Как вычислить ее радиус, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два угла?

8.25. Чему равен радиус окружности, вписанной в: а) ромб со стороной a и углом α между сторонами; б) четырехугольник, являющийся объединением двух равнобедренных треугольников с общим основанием и боковыми сторонами, равными a и b, образующими между собой угол φ?

ЗАДАЧИ К § 9

Вопросы для самоконтроля

Какие многоугольники называются правильными?

Какие многогранники называются правильными?

Что общего у правильных многоугольников и многогранников?

Какую точку называют центром правильного многоугольника?

Какую точку вы назвали бы центром правильного многогранника?

Какая точка куба является его центром?

Какие элементы правильного n-угольника вы можете вычислить, зная его сторону?

? Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой?

Какие свойства пентаграммы вам известны?

Что вы знаете о «золотом сечении»?

Задачи к пунктам 9.1, 9.2

А

9.1. Нарисуйте правильный треугольник. С его помощью можно получить другой правильный треугольник, например, соединив отрезками середины его сторон. Как еще можно получить правильный треугольник, используя данный? Можно ли, используя правильный треугольник, получить правильный шестиугольник?

9.2. Составьте задачу, аналогичную задаче 9.1, но уже для квадрата.

9.3. Нарисуйте правильный шестиугольник. Как с его помощью получить правильный: а) шестиугольник; б) треугольник; в) двенадцатиугольник?

9.4. Нарисуйте правильный пятиугольник. Как с его помощью можно получить: а) другой правильный пятиугольник; б) пятиконечную звезду?

9.5. Нарисуйте правильный шестиугольник. Какие звезды можно нарисовать с его помощью?

Б

9.6. Пусть точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. а) Докажите, что для любой точки X верно равенство $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XA}_1 + \overrightarrow{XA}_2 + \dots + \overrightarrow{XA}_n$. б) Докажите, что $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + \dots + \overrightarrow{OA}_n = \vec{0}$.

9.7. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. Возьмем точку P, не лежащую в его плоскости, и соединим ее отрезками со всеми его точками. Пусть при этом отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n равны между собой. Мы получили многогранник, который называется правильной n-угольной пирамидой. а) Сколько у нее вершин, ребер и граней? б) Докажите, что ее боковые грани (т. е. все, кроме правильного n-угольника, который называется основанием пирамиды) равны между собой. в) Пусть точка O — центр правильного многоугольника. Докажите, что все треугольники POA_i равны между собой. г) Оказывается, что PO перпендикулярен любой диагонали основания, проходящей через O. Попробуйте это доказать.

9.8. Какими правильными многоугольниками можно заполнить всю плоскость без просветов, не допуская их перекрытия?

9.9. Какими двумя видами правильных многоугольников можно заполнить плоскость без просветов, не допуская их перекрытия?

В

9.10. Если в правильном многоугольнике соединить отрезками середины сторон, то получится правильный многоугольник. Докажите это. Придумайте другие способы получения правильных многоугольников.

9.11. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что: а) для каждой его диагонали есть равная диагональ; б) среди его диагоналей есть перпендикулярные; в) среди его диагоналей есть параллельные.

9.12. Объясните, почему в правильном многоугольнике: а) равны наименьшие диагонали; б) из любой его вершины каждая сторона (кроме тех, которым эта вершина принадлежит) видна под одним и тем же углом; в) все треугольники, вершины которых находятся в вершинах данного многоугольника, имеют один и тот же радиус описанной окружности.

9.13. Будет ли правильным многоугольник, описанный около данной окружности и с равными: а) сторонами; б) углами?

9.14. Будет ли правильным многоугольник, вписанный в данную окружность и с равными: а) сторонами; б) углами?

Задачи к пункту 9.3

Б

9.15. Пусть дана сторона правильного n-угольника. Запишите формулу для радиуса описанной около него окружности. а) Выразите из нее сторону правильного n-угольника. б) Как из нее найти число сторон правильного многоугольника?

9.16. Пусть дана сторона правильного n-угольника. Запишите формулу для радиуса вписанной в него окружности. а) Выразите из нее сторону правильного n-угольника. б) Как из нее найти число сторон правильного многоугольника?

9.17. Дан правильный n-угольник со стороной 1. Около него описана окружность и в него вписана окружность. а) Запишите зависимость между радиусами этих окружностей. б) Чему равна ширина кольца, образованного этими окружностями?

9.18. Даны два правильных n-угольника. Сторона одного из них в два раза больше стороны другого. Чему равно отношение их: а) периметров; б) радиусов описанных окружностей; в) радиусов вписанных окружностей; г) площадей? Обобщите эту задачу.

В

9.19. Пусть известна сторона правильного n-угольника. Как найти его площадь?

9.20. Вычислите в правильном шестиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) угол между пересекающимися наименьшими диагоналями; в) отношение большей диагонали к меньшей; г) отношение частей большей диагонали, на которые ее делит меньшая диагональ; д) отношение частей, на которые делят друг друга меньшие диагонали; е) отношение площадей данного шестиугольника и треугольника, образованного его меньшими диагоналями (диагонали являются сторонами треугольника).

9.21. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника равен 1. Вычислите его сторону для n, равного 3, 4, 6.

9.22. Сторона правильного n-угольника равна 1. Вычислите радиус описанной около него окружности для n, равного 3, 4, 6.

9.23. Радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник, равен 1. Вычислите его сторону для n, равного 3, 4, 6.

9.24. Сторона правильного n-угольника равна 1. Вычислите радиус вписанной в него окружности для n, равного 3, 4, 6.

9.25. Как найти площадь правильного n-угольника, если известен радиус окружности: а) описанной около него; б) вписанной в него?

9.26. Пусть сторона правильного n-угольника равна a. Чему равна сторона правильного $2n$-угольника, если они оба вписаны в одну окружность (описаны около одной окружности)?

9.27. Что происходит с периметром правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, при увеличении числа его сторон? А с площадью? Что происходит с шириной кольца между описанной и вписанной окружностями у такого меняющегося многоугольника?

9.28. Что происходит с периметром правильного многоугольника, описанного около данной окружности, при увеличении числа его сторон? А с площадью?

9.29. Дана окружность. Около нее описан правильный n-угольник и в нее вписан правильный n-угольник. Сравните их площади и периметры.

9.30. Нарисуйте окружность. Проведите в ней радиус. Из его середины проведите перпендикуляр к нему до пересечения с окружностью. Говорят, что полученный перпендикуляр равен стороне правильного семиугольника, вписанного в эту окружность. Верно ли это?

9.31. Нарисуйте правильный шестиугольник. Разбейте его на ромбы. Можете ли вы разбить на ромбы другой правильный n-угольник?

Задачи к пункту 9.4

Б

9.32. Дана окружность. Постройте вписанный в нее: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник; г) правильный восьмиугольник.

9.33. Постройте окружность и описанный около нее: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный шестиугольник; г) правильный восьмиугольник.

9.34. Постройте какой-нибудь красивый рисунок, в котором (явно или неявно) использован правильный многоугольник.

Задачи к пункту 9.5

Б

9.35. Нарисуйте отрезок. Разделите его в отношении «золотого сечения».

В

9.36. Нарисуйте отрезок AB. Пусть точка C делит его в отношении «золотого сечения». На отрезке AC отложите отрезок $CD = CB$. Докажите, что точка D делит AC в отношении «золотого сечения».

9.37. Прямоугольник называется «золотым», если отношение его сторон равно отношению «золотого сечения». От «золотого» прямоугольника отрезали квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Докажите, что оставшаяся часть — «золотой» прямоугольник.

9.38. В одной математической книге есть примерно такой текст: «Поставьте вертикально прямоугольный треугольник с отношением катетов 2 : 1 на стол коротким катетом. Опрокиньте его на гипотенузу (в вертикальной плоскости), т. е. поставьте его гипотенузой на стол. Маневр с опрокидыванием дает «золотой» прямоугольник. Одной его стороной является больший катет, а другой — сумма меньшего катета и гипотенузы». Проверьте вывод этого эксперимента.

Задачи к пункту 9.6

А

9.39. Нарисуйте правильный тетраэдр. Как выбрать точки на его поверхности, чтобы они были вершинами правильного тетраэдра?

9.40. Нарисуйте куб. Как выбрать точки на его поверхности, чтобы они были вершинами: а) правильного тетраэдра; б) правильного октаэдра?

9.41. Нарисуйте правильный октаэдр. Как выбрать точки на его поверхности, чтобы они были вершинами куба?

Б

9.42. Сделайте из картона какой-нибудь правильный многогранник.

ЗАДАЧИ К § 10

Вопросы для самоконтроля

?

Как найти длину кривой?

По какой формуле вычисляется: а) длина окружности; б) площадь круга?

Что вы знаете о числе π?

По какой формуле вычисляется: а) длина дуги окружности; б) площадь сектора?

Что вы знаете о цилиндре?

Что вы знаете о конусе?

По какой формуле вычисляется объем: а) цилиндра; б) конуса?

? По какой формуле вычисляется площадь боковой поверхности: а) цилиндра; б) конуса?

По какой формуле вычисляется: а) объем шара; б) площадь сферы?

О каких математиках вы узнали в этом параграфе?

Задачи к пункту 10.2

Б

10.1. Запишите формулу длины окружности. а) Выразите из нее радиус окружности. б) Пусть радиус окружности увеличился в два раза. Как изменилась ее длина? Сформулируйте общий вывод и докажите его. в) Сформулируйте и докажите обратное утверждение. г) Докажите, что отношение длин окружностей равно отношению их радиусов. д) Пусть радиус окружности увеличился на 1. Как изменилась ее длина? е) Пусть длина окружности увеличилась на 1. Каково было увеличение ее радиуса?

10.2. Окружности с общим центром называются концентрическими, а разность их радиусов называется шириной ограниченного ими кольца. а) Как вычислить ширину кольца, если известны длины окружностей, его ограничивающих? б) Представьте себе, что Землю обтянули веревкой по экватору, а потом ее длину увеличили на 1 м и образовали из нее окружность, концентрическую с экватором. Пролезет ли в образовавшийся зазор кисть руки? в) Представьте себе, что шарик от настольного тенниса и футбольный мяч обтянули по экватору ниткой, а затем длину каждой увеличили на 10 см и образовали из них окружность, концентрическую с их экваторами. Где образовавшийся зазор будет больше?

10.3. а) Колесо катится по прямой. Какая существует зависимость между его радиусом, числом сделанных им оборотов и длиной пройденного пути?

б) По дороге едет телега с колесами разных радиусов. Одно из них крутится быстрее. Какое? Почему? Как узнать, во сколько раз быстрее оно крутится?

в) Два зубчатых колеса сцеплены между собой. Известны их радиусы. Пусть одно из них сделало n оборотов. Сколько оборотов сделало второе?

г) Пусть есть третье колесо известного радиуса, которое сцеплено с одним из данных колес. Сколько оборотов оно сделало? Что интересного в полученном результате?

д) Представьте, что третье колесо сцеплено с двумя данными колесами, ответьте на тот же вопрос.

10.4. Посередине часовой стрелки огромных башенных часов спит муха. Какой путь она проделает за сутки по отношению к пути, который пройдет конец этой стрелки? А если она уснула посередине минутной стрелки?

10.5. Можете ли вы построить прямоугольник с отношением сторон, равным π?

В

10.6. а) В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Вычислите отношение их длин.

б) Решите такую же задачу для квадрата.

в) Обобщите эту задачу.

10.7. Чему равна длина окружности, описанной около: а) прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4; б) прямоугольного треугольника с катетом a и острым углом φ против него; в) равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине φ; г) прямоугольника с меньшей стороной a и острым углом φ между диагоналями?

10.8. Чему равна длина окружности, вписанной: а) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1; б) прямоугольный треугольник с гипотенузой 1 и острым углом φ; в) равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине φ; г) равнобедренный треугольник с проведенной к основанию высотой, равной 1, и углом при вершине φ?

Задачи к пункту 10.3

Б

10.9. Запишите формулу площади круга. а) Выразите из нее радиус круга. б) Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 2 раза? Обобщите эту задачу. в) Как изменился радиус круга, если его площадь уменьшилась в два раза? г) Докажите, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов.

10.10. Как узнать расход воды, протекающей по трубе за 1 час?

10.11. а) С круглого стола свешивается квадратная скатерть. Как узнать, какая часть скатерти покрывает стол?

б) Какова наименьшая площадь квадратной скатерти, покрывающей данный круглый стол?

в) Какой наибольший круглый стол может покрыть данная квадратная скатерть?

г) Составьте аналогичные задачи для прямоугольной скатерти и круглого стола.

10.12. а) С квадратного стола свешивается круглая скатерть. Как узнать, какая часть скатерти покрывает стол?

б) Какова наименьшая площадь круглой скатерти, покрывающей данный квадратный стол?

в) Какой наибольший квадратный стол может покрыть данная круглая скатерть?

г) Составьте аналогичные задачи для круглой скатерти и прямоугольного стола.

10.13. Леонардо да Винчи измерял площадь круга так. Он катал по земле вал, ширина которого равнялась половине его радиуса; след этого вала после одного полного оборота он принимал по площади равным площади круга того же радиуса. Верно ли это?

10.14. Какой способ вычисления площади круга точнее — площадь круга равна: а) площади квадрата, сторона которого составляет 8/9 диаметра круга (египетский способ); б) площади квадрата, сторона которого составляет 7/8 диаметра (способ русских землемеров допетровской эпохи); в) площади квадрата, периметр которого равен длине окружности (также один из способов русских землемеров); г) 3/4 площади описанного около данного круга квадрата?

В

10.15. Как вычислить площадь кольца? Можно ли при этом обойтись всего одним измерением?

10.16. В круге радиуса R проведена концентрическая окружность. Какую часть составляет площадь полученного кольца от площади круга, если радиус меньшей окружности равен: а) $0{,}5R$; б) $0{,}9R$?

10.17. Внутри данного круга проходит окружность, которая делит его площадь пополам. В каком отношении она делит радиус данного круга?

10.18. Вычислите площадь круга, описанного около: а) равностороннего треугольника с катетом 1; б) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1; в) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим острым углом φ; г) равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом 120°.

10.19. а) Квадрат и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет бóльшую площадь?

б) Квадрат и круг равновелики (имеют одинаковую площадь). У какой из этих фигур длиннее граница?

Задачи к пункту 10.5

А

10.20. Какой из путей короче: $AB + CB$ или $\smile AKB$ (рис. 350, *а*); AOB или $\smile AKB$ (рис. 350, *б*); AB или $\smile AKB$ (рис. 350, *в*); ALB или $\smile AKB$ (рис. 350, *г*); AB или $\smile AKB$ (рис. 350, *д*); $\smile AKB$ или $\smile ALM + \smile MNB$ (рис. 350, *е*); $\smile BKC$ или BOC (рис. 350, *ж*); $\smile AKB$, $\smile ALB$ или $\smile AMB$ (рис. 350, *з*)?

10.21. Какая из площадей больше: S_1 или S_2 (рис. 351, *а, б, в, г*); $S_1 + S_2$ или S_3 (рис. 351, *д*); S или $S_1 + S_2 + S_3$ (рис. 351, *е, ж*)?

10.22. Запишите формулу для вычисления длины дуги окружности. а) Из нее выведите формулу, подтверждающую, что длина дуги окружности пропорциональна величине соответствующего ей центрального угла (при постоянном радиусе) и пропорциональна радиусу (при постоянном центральном угле). б) Выразите из этой формулы радиус окружности. Каков характер его зависимости от остальных величин? в) Выразите из этой формулы величину центрального угла, соответствующего данной дуге. Каков характер зависимости ее от остальных величин? г) Докажите, что длины двух дуг одной окружности относятся как соответствующие им центральные углы.

10.23. а) Как узнать, какой путь проходит конец часовой стрелки за 15 минут?

б) Какой путь проходит конец минутной стрелки за 15 минут?

в) Какой путь пройдет конец минутной стрелки, пока она нагонит часовую, если «погоня» началась в 15.00?

10.24. Запишите формулу для вычисления площади сектора. а) Как изменяется площадь сектора при изменении только радиуса? только угла? б) Выразите из этой формулы радиус. в) Как по этой формуле вычислить центральный угол сектора?

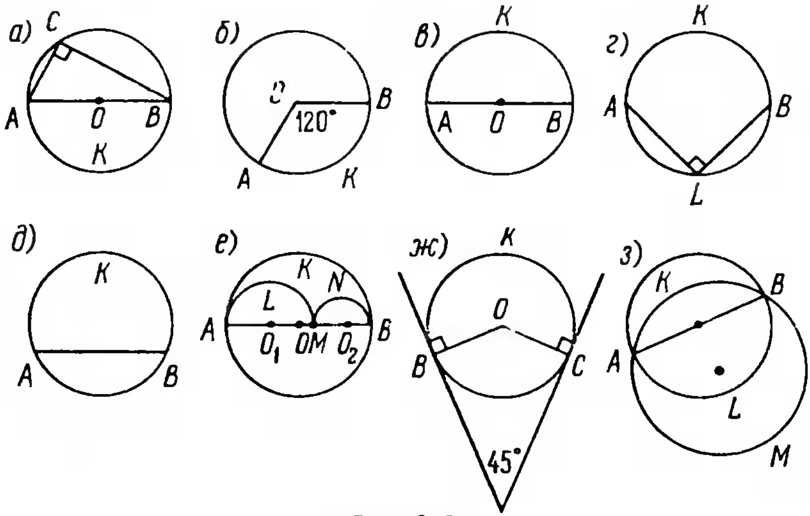


Рис. 350

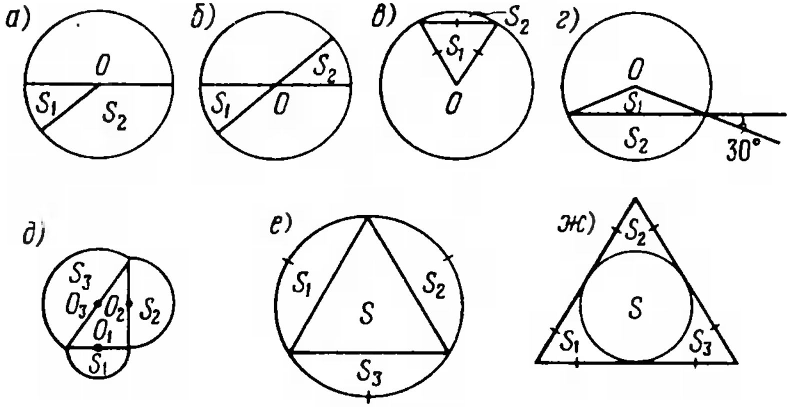


Рис. 351

10.25. Лошадь пасется на лугу, имеющем форму квадрата. При этом она привязана в одном из его углов. Какой должна быть длина веревки, которой она привязана, если травы на лугу должно хватить на 2 дня? (За два дня лошадь съедает всю траву на лугу и каждый день она должна съедать одинаковое количество травы.)

10.26. За круглым столом сидят 12 рыцарей. а) Как найти расстояние между двумя соседними рыцарями? б) Как найти расстояние между первым и одиннадцатым рыцарем? в) Однажды взявшись за руки, рыцари обхватили весь стол. Можете ли вы оценить размеры стола? г) Какой величины тарелка уместится перед каждым рыцарем на той площади стола, которой он «владеет»?

10.27. Что вы будете измерять и как проведете вычисления, чтобы узнать площадь реального: а) сектора; б) сегмента?

10.28. Шоссейная дорога изменила направление. Изменение направления дороги происходит по окружности. Предположим, вы проектируете дорогу. Что нужно знать, чтобы вычислить длину дороги на переходном участке?

В

10.29. На окружности радиуса 1 отмечена дуга. Чему равна ее длина, если эта дуга видна из центра под углом: а) $30°$; б) $135°$; в) $240°$; г) $315°$; д) $70°$; е) $184°$; ж) φ? Чему равна площадь соответствующего сектора?

10.30. Под каким углом видна из центра окружности радиуса 1 дуга этой окружности, длина которой равна: а) π; б) $\pi/2$; в) $\pi/6$; г) $2\pi/3$; д) $7\pi/4$; е) $11\pi/6$; ж) 1?

10.31. а) В окружности радиуса R проведена хорда длиной R. Чему равны длины стягивающих дуг и площади соответствующих секторов?

б) Какой длины должна быть хорда в окружности радиуса R, чтобы длина одной дуги была в 2 раза больше длины другой? А чтобы площадь одного из соответствующих секторов была в 2 раза больше площади другого?

10.32. Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности длина ближайшей к этой точке дуги окружности увеличивается.

10.33. Как вычислить площадь сектора, если известны: а) радиус круга и длина его дуги; б) длина его дуги и центральный угол; в) длина его границы и центральный угол?

10.34. В круге радиуса R проведена хорда. Она видна из центра под углом φ. Как, зная R и φ, найти площадь образовавшихся сегментов?

10.35. В круге радиуса 1 проведена хорда. Чему равна площадь меньшего полученного сегмента, если хорда видна из центра под углом, заданным в условии задачи 10.29?

10.36. Ясно, что хордой можно отсечь от круга 1/3 его площади. Можно ли найти центральный угол, соответствующий этой хорде?

10.37. Сектор состоит из треугольника и сегмента. а) Докажите, что при центральном угле сектора 120° площадь сегмента больше площади треугольника, а при центральном угле 30° она меньше. Могут ли они иметь равные площади?

Задачи к пункту 10.7

Б

10.38. Напишите формулу для объема цилиндра. а) Выразите из нее высоту цилиндра, его радиус. б) Пусть все линейные размеры, определяющие цилиндр, увеличились в два раза. Во сколько раз увеличился его объем? в) Объем цилиндра требуется уменьшить в 3 раза. Как это сделать? г) Жидкость из полной цилиндрической пробирки переливают в другую, радиус которой в два раза меньше. Во сколько раз она должна быть выше? д) Из проволоки диаметра D делают на волочильном станке проволоку диаметра d. Исходная проволока имела длину L. Какова длина полученной проволоки?

10.39. Как разделить на равновеликие части торт, имеющий форму цилиндра?

10.40. а) В цилиндрическом сосуде находится вода. Как из него вылить ровно половину?

б) В цилиндрический сосуд налита доверху вода. Сосуд наклонили на некоторый угол. Как узнать, какой объем воды вылился?

10.41. Как приближенно вычислить объем дерева?

10.42. Запишите формулу для объема конуса. а) Выразите из нее высоту конуса, радиус его основания. б) Выразите объем конуса через образующую и радиус основания; через образующую и высоту; через образующую и угол при вершине его осевого сечения.

10.43. а) Запишите формулу для площади боковой поверхности цилиндра. Выразите из нее радиус и высоту цилиндра.

б) Пусть известна площадь боковой поверхности цилиндра. Можно ли найти площадь поверхности всего цилиндра? его объем?

в) Пусть известна площадь поверхности цилиндра. Можно ли найти площадь его боковой поверхности? его объем?

г) Пусть известен объем цилиндра. Можно ли найти площадь его боковой поверхности? площадь всей поверхности?

д) Пусть известны две из трех величин: площадь боковой поверхности цилиндра, его радиус и высота. Можно ли найти третью?

10.44. Вода в коническом сосуде была налита доверху. а) На сколько понизился ее уровень, когда отлили половину? б) Какая часть объема осталась, когда уровень воды понизился в два раза?

10.45. Как узнать, сколько песка находится в куче?

10.46. Лампа имеет абажур в виде усеченного конуса. Как узнать, сколько материала пошло на его изготовление?

В

10.47. Вычислите: а) объем и площадь поверхности цилиндра, осевым сечением которого является квадрат со стороной 1; б) объем и площадь поверхности конуса, осевым сечением которого является равносторонний треугольник со стороной 1.

10.48. Вычислите объем и площадь поверхности тела вращения, полученного при вращении: а) равностороннего треугольника со стороной 2 вокруг высоты; б) равностороннего треугольника со стороной 2 вокруг прямой, параллельной его высоте и проходящей через его вершину; в) равнобокой трапеции с основаниями 4 и 2, углом при основании 45° вокруг средней линии оснований; г) ромба со стороной 1 и острым углом 60° вокруг меньшей диагонали.

Задачи к пункту 10.8

Б

10.49. Запишите формулу для объема шара. а) Выразите его радиус. б) Пусть радиус шара увеличился в два раза. Что произошло с объемом? в) Пусть объем уменьшился в три раза. Как изменился радиус шара? Составьте аналогичные задачи для площади сферы.

10.50. а) Выразите объем шара через площадь его поверхности. Запишите обратную зависимость.

б) Пусть объем шара начал расти. Что будет происходить с его поверхностью? Решите обратную задачу.

в) Пусть объем шара увеличился в 3 раза. Как изменилась его площадь поверхности?

г) Может ли объем шара численно равняться площади его поверхности?

10.51. Все золото, добытое в мире, составляет 3000 тонн. Предположим, что из него делают шар. Каков будет его радиус?

10.52. Из тысячи металлических шариков радиуса 1 сделали один шар. Каков его радиус?

10.53. Что бы вы предпочли: съесть арбуз радиуса 15 см вчетвером или радиуса 20 см ввосьмером? Дайте ответ, а затем проверьте его вычислением.

10.54. В большом ящике — прямоугольном параллелепипеде — находятся мелкие одинаковые металлические шарики. Ящик заполнен шариками доверху. Предложите способ приближенного подсчета числа шариков.

10.55. Окрашены два шара. Радиус одного в два раза больше радиуса другого. Во сколько раз больше ушло на него краски?

10.56. Из шара площадью поверхности 1 см^2 сделали некоторое количество одинаковых шариков. Может ли суммарная площадь их поверхности быть больше 1 м^2?

10.57. а) Какая часть объема шара радиуса R содержится между двумя концентрическими сферами (сферы с общим центром), радиусы которых R и $0{,}9R$?

б) Каким надо взять радиус меньшей сферы, чтобы между ними находилась половина объема шара?

10.58. Площадь поверхности шара равна S. Чему равна площадь поверхности полушара?

ЗАДАЧИ К § 11

Вопросы для самоконтроля

Какое преобразование фигуры называется параллельным переносом?

Какие свойства фигуры сохраняются в результате ее параллельного переноса и какие изменяются?

Приведите примеры фигур, обладающих переносной симметрией.

В чем состоит метод параллельного переноса?

Задачи к пункту 11.1

А

11.1. Нарисуйте отрезок AB и его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$ при условии, что точка C не лежит на прямой AB. Какую фигуру «заметает» при этом переносе отрезок AB?

11.2. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC и треугольник, который получается из него в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BK}$, где точка K — середина AC; в) CO, где точка O — центр треугольника. Для каждого случая нарисуйте пересечение и объединение данного и полученного треугольников.

11.3. Нарисуйте любой треугольник и любой вектор. а) Нарисуйте образ этого треугольника в результате переноса на данный вектор. б) Пусть данный и полученный треугольник имеют общие точки. Нарисуйте их пересечение и объединение. Какие многоугольники могут получиться при этом?

11.4. Решите задачу, аналогичную задаче 11.3: а) для квадрата; б) круга.

11.5. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. а) Укажите перенос, который переводит AB в CD. Куда при этом переносе переходит AD? AC? б) Какой перенос переводит CD в AB?

11.6. Нарисуйте два равных квадрата так, что они: а) могут быть совмещены переносом; б) не могут быть совмещены переносом.

11.7. Нарисуйте два равных круга. Укажите перенос, которым они совмещаются.

11.8. Нарисуйте параллелограмм и его образ в результате некоторого переноса. Сколько параллелограммов на сделанном вами рисунке?

Б

11.9. а) Докажите, что в результате переноса прямая переходит в прямую, ей параллельную, или в себя.

б) Пусть даны две параллельные прямые. Каким переносом может быть получена одна из них из другой?

в) Пусть даны два равных и параллельных отрезка. Каким переносом один из них может быть получен из другого?

11.10. а) Нарисуйте круг и некоторый вектор, не лежащий в его плоскости. Нарисуйте образ круга в результате переноса на данный вектор. Соедините соответственные точки этих кругов отрезками. Какая фигура получается при объединении всех таких отрезков? Можно ли таким образом получить куб?

б) Решите аналогичную задачу, взяв вместо круга треугольник, а затем параллелограмм.

11.11. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{CA_1}$; г) $\overrightarrow{BO}$, где точка O — центр куба. Для последнего случая нарисуйте пересечение и объединение данного и полученного кубов.

11.12. Используя условия задачи 11.6, нарисуйте: а) два цилиндра; б) два конуса.

В

11.13. Нарисуйте точку. Рассмотрите все возможные переносы этой точки. Какая получится в результате фигура, если: а) все переносы пойдут в одном и том же направлении; б) все векторы будут параллельны одной прямой; в) все векторы будут параллельны одной плоскости; г) все переносы будут на одно и то же расстояние?

11.14. Нарисуйте любой отрезок. Рассмотрите всевозможные его переносы на вектор одной и той же длины. Какая при этом получится фигура?

11.15. Вернитесь к задаче 11.1, в. Пусть $AB = AC = 1$, $\angle CAB = \varphi$. Чему равна площадь «заметенной» фигуры?

11.16. В результате переноса треугольника на вектор каждая его сторона «заметает» некоторую площадь. а) Какая из них «заметает» бо́льшую площадь? б) Докажите, что бо́льшая из этих площадей равна сумме меньших. в) Используйте этот результат для доказательства теоремы Пифагора.

11.17. Вернитесь к задаче 11.2, в. Пусть сторона треугольника равна 1. Чему равны периметр и площадь пересечения? объединения?

Задачи к пункту 11.2

Б

11.18. Из равных параллелограммов можно сделать бордюр. Из каких еще фигур можно это сделать?

11.19. Из равных параллелограммов можно сделать орнамент. А можно ли его сделать из неравных параллелограммов или из других фигур, не являющихся параллелограммами?

11.20. Из равных кубов можно составить бесконечный ряд. А из каких еще фигур можно его составить?

11.21. Из равных прямоугольных параллелепипедов можно составить слой. А можно ли его составить из неравных прямоугольных параллелепипедов? Из каких еще фигур можно его составить?

11.22. Все пространство можно заполнить равными прямоугольными параллелепипедами. А какими еще фигурами можно его заполнить?

Задачи к пункту 11.3

Б

11.23. На листе бумаги нарисуйте угол. Оторвите у него вершину. Можете ли вы найти величину этого угла?

В

11.24. Постройте трапецию по четырем сторонам.

11.25. Постройте прямую, которая высекает на двух данных равных кругах хорды одинаковой длины.

11.26. а) В равнобокой трапеции угол при основании равен 60°. Докажите, что боковая сторона равна разности оснований. Проверьте обратное утверждение.

б) Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Высота трапеции равна меньшему ее основанию и равна 1. Чему равна площадь трапеции?

ЗАДАЧИ К § 12

Вопросы для самоконтроля

?

Какое преобразование фигуры называется поворотом на плоскости?

Какие свойства фигуры сохраняются после поворота на плоскости? какие изменяются?

Какое преобразование фигуры называется центральной симметрией?

Какие свойства фигуры сохраняются в результате ее центральной симметрии? какие меняются?

В чем состоит метод поворота? метод центральной симметрии?

Какое преобразование фигуры называется поворотом в пространстве?

Какие свойства фигуры сохраняются после поворота в пространстве? какие изменяются?

Задачи к пункту 12.1

А

12.1. Нарисуйте отрезок AB и его образ в результате поворота: а) вокруг точки A на 120° по часовой стрелке; б) вокруг точки B на 60° против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на 90° по часовой стрелке.

12.2. Нарисуйте отрезок и точку вне его. Пусть эта точка будет центром поворота. Нарисуйте образ этого отрезка в результате поворота по часовой стрелке на угол: а) 30°; б) 90°; в) 135°. В каждом случае найдите угол между новым и старым положением отрезка. Можете ли вы обобщить результат, который получается?

12.3. Нарисуйте образ равностороннего треугольника ABC в результате поворота против часовой стрелки: а) вокруг A на 120°; б) вокруг B на 60°; в) вокруг C на 30°; г) вокруг середины AC на 90°; д) вокруг центра на 120°; е) вокруг центра на 60°. В каждом случае нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного треугольников.

12.4. Используя условия задачи 12.3, решите задачу: а) для квадрата; б) круга.

12.5. Нарисуйте два равных отрезка так, что их: а) можно совместить поворотом; б) нельзя совместить поворотом.

12.6. Нарисуйте два равных круга. Найдите поворот, с помощью которого их можно совместить.

В

12.7. Нарисуйте два равных отрезка так, что их: а) можно совместить поворотом или переносом; б) можно совместить поворотом, но не переносом; в) нельзя совместить ни поворотом, ни переносом.

Задачи к пункту 12.2

Основные задачи

12.8. Нарисуйте отрезок и его образ в результате центральной симметрии относительно: а) конца отрезка; б) середины отрезка; в) произвольной точки отрезка; г) точки на продолжении отрезка; д) точки вне отрезка.

12.9. Нарисуйте равносторонний треугольник и его образ в результате центральной симметрии относительно: а) середины стороны; б) середины медианы; в) центра. Для каждого случая нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного треугольников.

12.10. Составьте задачу, аналогичную задаче 12.8: а) для квадрата; б) трапеции, составленной из трех равносторонних треугольников; в) круга.

12.11. Нарисуйте два равных отрезка так, что их: а) можно совместить центральной симметрией; б) нельзя совместить центральной симметрией.

Б

12.12. Докажите, что в результате центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя.

12.13. Две прямолинейные дороги пересекаются за пределами карты. Как найти угол между ними, используя центральную симметрию?

12.14. Как записать в координатах центральную симметрию относительно: а) начала координат; б) точки A $(x_0, 0)$; в) точки B $(0, y_0)$; г) точки C (x_0, y_0)?

В

12.15. Нарисуйте два равных отрезка так, что их: а) можно совместить центральной симметрией или переносом; б) можно совместить центральной симметрией, но не переносом; в) нельзя совместить ни центральной симметрией, ни переносом.

12.16. Для каждой вершины равностороннего треугольника построили точку, симметричную ей относительно середины противоположной стороны. Вершинами какого по виду треугольника являются полученные точки? Придумайте аналогичные задачи.

12.17. Сравните периметры и площади фигур на рис. 352.

12.18. Можно ли параллелограмм определить как четырехугольник, имеющий центр симметрии?

12.19. Нарисуйте два равных круга. Докажите, что они центрально симметричны.

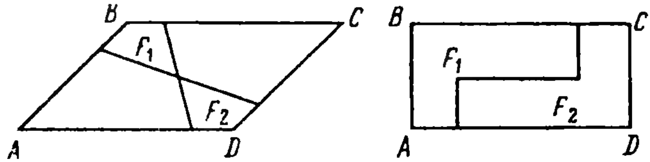


Рис. 352

Задачи к пункту 12.3

Б

12.20. Какие цифры и печатные буквы имеют центр симметрии?

В

12.21. Имеет ли центр симметрии: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) полуплоскость; д) плоскость; е) угол; ж) пара вертикальных углов?

12.22. Имеет ли центр симметрии: а) объединение двух равных равносторонних треугольников; б) пересечение двух равных треугольников?

12.23. Имеет ли центр симметрии: а) объединение двух равных кругов; б) пересечение двух равных кругов?

Задачи к пункту 12.4

В

12.24. Докажите, что в одной окружности равные хорды: а) равноудалены от центра; б) видны из центра под равными углами; в) соединяют концы равных дуг; г) отсекают от круга равные сегменты. Проверьте обратные рассуждения.

12.25. На всех сторонах равностороннего треугольника в одном и том же направлении отложите от вершин равные отрезки. Докажите, что полученные три точки на сторонах являются вершинами равностороннего треугольника. Обобщите задачу. Получите из нее какие-либо следствия.

12.26. Постройте точку Торричелли для треугольника: а) равностороннего; б) равнобедренного прямоугольного; в) равнобедренного с тупым углом при вершине.

12.27. Нарисуйте любой правильный многоугольник. Из его центра проведите векторы ко всем его вершинам. Чему равна их сумма?

Задачи к пункту 12.5

Б

12.28. а) Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

б) Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, имеющих с ней общую вершину.

12.29. Нарисуйте угол и отметьте точку внутри него. Постройте такую хорду угла, которая этой точкой делится пополам. Докажите, что эта хорда отсекает от угла треугольник наименьшей площади.

12.30. Докажите, что всякая хорда параллелограмма, проходящая через точку пересечения его диагоналей: а) делится этой точкой пополам; б) делит параллелограмм на равновеликие части.

12.31. Как разделить квадрат на четыре равновеликие части двумя пересекающимися хордами?

Задачи к пункту 12.6

А

12.32. Какая фигура получается в результате вращения отрезка вокруг прямой, если прямая перпендикулярна отрезку и проходит: а) через его конец; б) через его середину; в) мимо него?

12.33. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении отрезка вокруг прямой, лежащей с ним в одной плоскости, не перпендикулярной ему и проходящей: а) через его конец; б) через его середину; в) мимо него?

12.34. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения отрезка вокруг прямой, не лежащей с ним в одной плоскости.

12.35. Нарисуйте фигуру, которая получится в результате вращения равностороннего треугольника вокруг прямой, проходящей: а) через его сторону; б) через его ось симметрии; в) параллельно его стороне; г) через вершину и перпендикулярной его стороне.

12.36. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении квадрата вокруг прямой, проходящей: а) через его сторону; б) параллельно его стороне; в) через его диагональ; г) параллельно его диагонали.

12.37. Нарисуйте круг и фигуру, которая получается при вращении круга вокруг прямой, проходящей: а) через его диаметр; б) через его хорду; в) через точку на его окружности; г) мимо него.

12.38. Нарисуйте правильный тетраэдр и тетраэдр, центрально симметричный данному относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра грани; г) середины высоты. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров.

12.39. Выберите произвольный многогранник и составьте про него задачу, аналогичную задаче 12.38.

В

12.40. Нарисуйте два равных шара. Докажите, что они центрально симметричны.

12.41. Нарисуйте отрезок и прямую, не лежащую с ним в одной плоскости. Нарисуйте отрезок, симметричный данному относительно этой прямой. Может ли его образ быть точкой?

12.42. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABCD$. Проведите прямую через середины ребер PA и BC. Докажите, что она является осью симметрии правильного тетраэдра. Куда в результате этой симметрии перейдут: а) PA; б) AC; в) грань PAB; г) отрезок, соединяющий середины двух других ребер тетраэдра?

12.43. Составьте задачу про куб, аналогичную задаче 12.42.

ЗАДАЧИ К § 13

Вопросы для самоконтроля

? Какое преобразование фигуры называется осевой симметрией?

Какие фигуры называют симметричными относительно прямой?

Какие вы знаете свойства осевой симметрии?

Какое преобразование фигуры называется зеркальной симметрией?

Какое преобразование фигуры называют скользящей симметрией на плоскости?

Какое преобразование фигуры называют скользящей симметрией в пространстве?

Какое преобразование фигуры называют зеркальным поворотом в пространстве?

Задачи к пунктам 13.1, 13.2

А

13.1. Нарисуйте отрезок и отрезок, симметричный ему относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) проходящей через точку внутри него и параллельной ему; г) проходящей мимо него и не параллельной ему.

13.2. Нарисуйте равносторонний треугольник. Отразите его от прямой, проходящей через: а) его среднюю линию; б) его высоту; в) перпендикуляр из середины одной из его сторон на другую сторону. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного треугольников.

13.3. Нарисуйте прямоугольник. Отразите его от прямой, проходящей через его диагональ. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного прямоугольников.

13.4. Нарисуйте окружность, а в ней хорду, отличную от диаметра. Отразите окружность от прямой, проходящей через эту хорду. Нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного кругов.

13.5. Нарисуйте два равных отрезка так, чтобы их: а) можно было совместить осевой симметрией; б) нельзя было совместить осевой симметрией.

Б

13.6. Докажите, что в результате осевой симметрии: а) прямая, параллельная оси симметрии, переходит в прямую, параллельную данной; б) прямая, пересекающая ось симметрии, переходит в прямую, также пересекающую эту ось, причем в той же точке, что и данная прямая; в) прямая, перпендикулярная оси симметрии, переходит в себя же.

13.7. Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0). Каковы координаты точки, симметричной ей относительно оси: а) x; б) y; в) $x = a$; г) $y = b$; д) $x = y$?

В

13.8. Нарисуйте два равных отрезка так, чтобы их можно было совместить осевой симметрией и: а) еще каким-нибудь движением; б) больше никаким движением.

13.9. Нарисуйте два треугольника, симметричных между собой относительно какой-то прямой. Могут ли они быть симметричны еще относительно какой-то прямой? Может ли таким свойством обладать их пересечение? объединение?

13.10. Определим равнобедренный треугольник как треугольник, имеющий ось симметрии. Какими свойствами он будет обладать?

13.11. Используя условие задачи 13.2, вычислите периметр и площадь как пересечения, так и объединения исходного и полученного треугольников, если сторона треугольника равна 2.

13.12. Используя условие задачи 13.3, вычислите периметр и площадь как пересечения, так и объединения исходного и полученного прямоугольников, если стороны исходного равны 1 и 2.

13.13. Используя условие задачи 13.4, вычислите периметр и площадь как пересечения, так и объединения исходного и полученного кругов, если радиус круга и длина хорды равны 1.

13.14. Нарисуйте треугольник. Каждую его вершину отразите от противоположной стороны. Три полученные точки являются вершинами другого треугольника. Определите его вид в зависимости от вида данного треугольника. Обобщите задачу.

Задачи к пункту 13.3

Б

13.15. Возьмите лист бумаги из тетради. Как, только сгибая лист, получить: а) квадрат; б) ромб (но не квадрат)?

13.16. Вырежьте из бумаги круг. Возможно ли, сгибая лист бумаги, получить два взаимно перпендикулярных диаметра?

13.17. Можете ли вы объяснить, почему линия сгиба листа бумаги — прямая?

В

13.18. На сторонах угла отложили от вершины два равных отрезка. Концы соединили отрезком. Докажите, что он перпендикулярен биссектрисе угла и делится ею пополам.

13.19. Из двух вершин основания равнобедренного треугольника провели медианы на противоположные стороны. Докажите, что они: а) равны; б) пересекаются на третьей медиане. Придумайте аналогичные задачи.

13.20. Придумайте задачи о равнобокой трапеции, аналогичные задаче 13.19.

13.21. Из конца диаметра круга провели две равные хорды. Докажите, что они образуют с этим диаметром равные углы. Какие еще свойства этих хорд вы можете доказать?

13.22. Нарисуйте любой треугольник ABC и точку D так, чтобы четырехугольник $ABCD$ имел: а) ось симметрии; б) ось симметрии и центр симметрии.

Задачи к пункту 13.4

А

13.23. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим его плоскость симметрии $KLMN$, где K — середина ребра AA_1, L — середина ребра BB_1, M — середина ребра CC_1, N — середина ребра DD_1. 1) Нарисуйте образ в результате зеркального отражения от этой плоскости таких отрезков: а) A_1B_1; б) AA_1; в) B_1D_1; г) C_1D; д) A_1C. 2) Нарисуйте образ: а) треугольника A_1C_1D; б) четырехугольника B_1KDM; в) четырехугольника AB_1C_1D; г) тетраэдра BDA_1C_1. 3) Нарисуйте другую плоскость симметрии куба и придумайте аналогичные задачи.

13.24. Нарисуйте правильный тетраэдр $PABC$. Пусть точка K — середина его ребра PA. Рассмотрим его плоскость симметрии BCK. Нарисуйте образ в результате зеркального отражения от этой плоскости: а) ребра PC; б) ребра AB; в) грани PBC; г) грани PAC; д) отрезка, соединяющего середины ребер AC и PB. Нарисуйте другую плоскость симметрии этого тетраэдра и придумайте аналогичные задачи.

13.25. Нарисуйте куб и его образ в результате зеркальной симметрии относительно плоскости его грани. В результате какой зеркальной симметрии он перейдет в себя? Что изменится, если вместо куба мы будем рассматривать прямоугольный параллелепипед?

13.26. Решите задачу, аналогичную задаче 13.25, для правильного: а) тетраэдра; б) октаэдра.

Задачи к пункту 13.5

А

13.27. Нарисуйте квадрат и прямую, которая параллельна его стороне, но квадрата не пересекает. Нарисуйте образ: а) данного квадрата в результате скользящей симметрии, осью которой является данная прямая, а вектор задается стороной квадрата; б) полученного квадрата в результате этой же скользящей симметрии. Каким движением можно совместить первый и третий квадрат?

13.28. Нарисуйте бордюр из квадратов. Какой получится бордюр, если данный бордюр подвергнуть скользящей симметрии, осью которой является граница бордюра?

Б

13.29. Можете ли вы привести реальные примеры: а) скользящих симметрий; б) зеркального поворота?

В

13.30. Вернитесь к задаче 13.23. В качестве плоскости симметрии выберем плоскость $KLMN$, вектора скользящей симметрии — вектор, задаваемый его ребром. Нарисуйте образ вершины A в результате этой скользящей симметрии. Проделайте это же для других вершин куба, его ребер, диагоналей граней и диагоналей куба.

13.31. Вернитесь к задаче 13.23. В качестве плоскости симметрии выберем плоскость $KLMN$, а оси зеркального поворота — отрезок, соединяющий центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте образ вершины A в результате этого зеркального поворота. Проделайте это же для других вершин куба, его ребер, диагоналей граней и диагоналей куба.

ЗАДАЧИ К § 14

Вопросы для самоконтроля

? Что означают фразы: «Эта фигура симметрична», «Эта фигура симметричнее другой», «Эта фигура несимметрична»?

Что означает фраза: «Эта фигура имеет: а) центр симметрии; б) ось симметрии; в) центр поворотной симметрии; г) переносную симметрию; д) поворотную симметрию; е) зеркальную симметрию»?

Сколько у ограниченной фигуры может быть: а) центров симметрии; б) центров поворотной симметрии; в) осей симметрии?

Сколько у неограниченной фигуры может быть: а) центров симметрии; б) центров поворотной симметрии; в) осей симметрии?

Сколько элементов симметрии имеют: а) равносторонний треугольник; б) параллелограмм; в) квадрат; г) круг; д) куб; е) правильный тетраэдр; ж) цилиндр; з) конус; и) шар?

Задачи к пунктам 14.2, 14.3

Б

14.1. Восстановите: а) угол по биссектрисе и точке на его стороне; б) полосу по средней линии и точке на границе; в) равнобедренный треугольник по высоте на основание и двум точкам на его боковых сторонах; г) треугольник по прямой, проходящей через его биссектрису, и двум точкам на сторонах угла, содержащего эту биссектрису; д) равносторонний треугольник по его центру и трем точкам на трех его сторонах; е) квадрат по четырем точкам на четырех его сторонах; ж) треугольник по серединам его сторон; з) пятиугольник по серединам его сторон.

14.2. Федя нарисовал равносторонний треугольник. На каждой стороне он построил квадраты вне этого треугольника, а затем для каждого квадрата — его центр. Пришел Вася, стер этот рисунок и оставил только центры квадратов. а) Можно ли восстановить исходный рисунок? б) Можно ли восстановить исходный рисунок, если исходный треугольник был произвольным? в) Как использовать эту задачу для того, чтобы запрятать сундук с ценными бумагами?

14.3. Вершина угла недоступна. Проведите прямую, проходящую через данную точку внутри угла и через его вершину.

В

14.4. Какие элементы симметрии имеют: а) отрезок; б) прямая; в) два параллельных и равных отрезка; г) две пересекающиеся прямые; д) две параллельные прямые; е) полоса; ж) равнобедренный треугольник (не равносторонний); з) ромб; и) прямоугольник; к) равнобокая трапеция?

14.5. Какими движениями самосовмещается: а) окружность с выколотой точкой; б) окружность с двумя выколотыми точками; в) окружность с тремя выколотыми точками; г) объединение двух равных отрезков с общей вершиной; д) объединение двух равносторонних треугольников с общей вершиной; е) объединение двух равносторонних треугольников с общей стороной; ж) пересечение двух равносторонних треугольников с общим центром?

14.6. Можете ли вы нарисовать фигуру, которая самосовмещается ровно тремя движениями?

Задачи к пунктам 14.4, 14.5

14.7. Какие элементы симметрии есть: а) у слоя между двумя параллельными плоскостями; б) двугранного угла; в) трехгранного угла, в котором все плоские углы прямые; г) пересечения двух равных шаров; д) объединения двух неравных шаров?

14.8. Какие элементы симметрии есть у объединения двух: а) кубов с общей гранью; б) равных правильных треугольных пирамид с общим основанием; в) конусов с общим основанием?

14.9. Какими движениями самосовмещаются: а) полушар; б) полуконус (часть конуса, в основании которой полукруг); в) полуцилиндр (часть цилиндра, в основании которой полукруг)?

ЗАДАЧИ К § 15

Вопросы для самоконтроля

Какие фигуры называются равными?

Сколько разных видов движений существует: а) на плоскости; б) в пространстве?

Можете ли вы провести классификацию движений: а) на плоскости; б) в пространстве?

Какие свойства фигур сохраняются при движениях?

Какие свойства фигур изменяются при движениях?

А

15.1. Объясните равенство фигур на рис. 353, *а—д*.

15.2. Разделите на равные фигуры: а) квадрат (на две); б) круг (на три); в) крест из двух равных прямоугольников (на две); г) правильный шестиугольник (на три); д) кольцо (на четыре).

15.3. Разделите фигуры на равные части: на три (рис. 354, *а*, *б*); на четыре (рис. 354, *в*); на две (рис. 354, *г*).

Б

15.4. Докажите, что в результате движения: а) объединение двух фигур переходит в объединение их образов; б) пересечение двух фигур переходит в пересечение их образов.

15.5. Для каждого движения рассмотрите обратное преобразование, докажите, что оно является движением и установите вид этого движения.

15.6. Тороидальная стеклянная трубка находится в вертикальной плоскости, а по ней движется вода. а) Изменится ли направление потока воды, если трубку повернуть на 180° вокруг: горизонтальной оси, вертикальной оси? б) Как будет выглядеть направление этого потока в вертикальном зеркале?

В

15.7. Объясните, почему в результате движения переходит: а) окружность в окружность; б) круг в круг; в) полуплоскость в полуплоскость; г) угол в угол; д) параллелограмм в параллелограмм; е) квадрат в квадрат; ж) правильный многоугольник в правильный многоугольник.

15.8. Фигура имеет: а) центр симметрии; б) ось симметрии. Докажите, что ее образ в результате любого движения будет обладать тем же свойством.

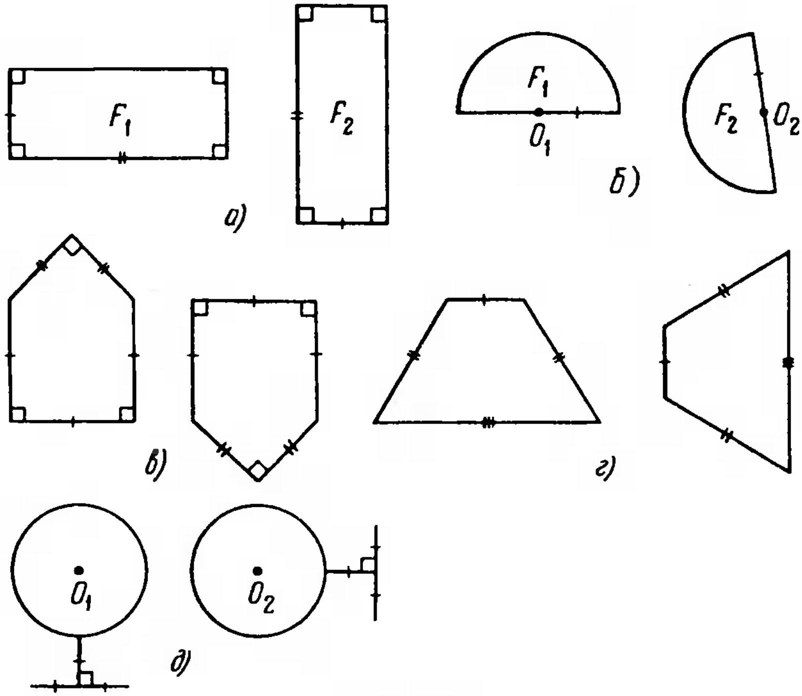


Рис. 353

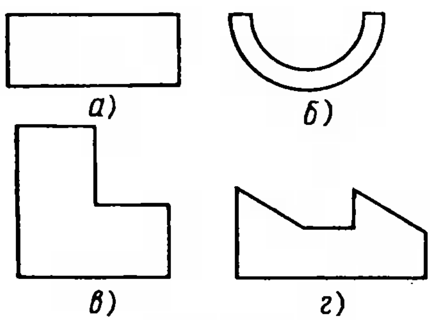


Рис. 354

15.9. Докажите, что любая *замечательная точка* треугольника (например, центр масс) в результате движения перейдет в такую же точку образа треугольника.

15.10. В результате некоторого движения у фигуры оказались неподвижные точки. Будут ли у нее еще неподвижные точки, если таковых оказалось: а) одна; б) две; в) три, причем они не лежат на одной прямой?

15.11. Для каждого из движений плоскости выясните, какую фигуру образуют все неподвижные точки этого движения.

15.12. Придумайте композицию двух любых движений плоскости. Определите, какого вида будет полученное движение. Будут ли у него неподвижные точки?

ЗАДАЧИ К § 16

Вопросы для самоконтроля

Приведите примеры подобных фигур.

Какие фигуры называются подобными?

Какие фигуры называются гомотетичными?

Приведите примеры гомотетичных фигур.

Какие свойства имеет гомотетия?

Какие свойства имеет подобие?

Какие вы знаете признаки подобия треугольников?

В чем состоит метод подобия?

Задачи к пункту 16.3

А

16.1. Нарисуйте точку O — центр гомотетии и точку A. Нарисуйте образ точки A, если коэффициент гомотетии равен: а) 2; б) 1/3; в) −4; г) 1.

16.2. Нарисуйте треугольник ABC и гомотетичный ему треугольник с центром: а) A и коэффициентом гомотетии 2; б) B и коэффициентом гомотетии 1/2; в) C и коэффициентом гомотетии −2; г) в середине BC и коэффициентом гомотетии 2; д) в середине AC и коэффициентом гомотетии −0,5.

16.3. Нарисуйте квадрат $ABCD$ и гомотетичный ему квадрат с центром гомотетии: а) на стороне и коэффициентом гомотетии $-2/3$; б) средней линии и коэффициентом гомотетии $-1/3$; в) диагонали и коэффициентом гомотетии 2.

16.4. Нарисуйте окружность и окружность, гомотетичную ей, с центром гомотетии: а) на окружности; б) внутри круга; в) вне круга. Каждое задание выполните с коэффициентами гомотетии: 2; 1/2; -2.

16.5. Нарисуйте любой многоугольник и гомотетичный ему многоугольник, взяв центр гомотетии: а) в вершине; б) произвольной точке. (Коэффициент гомотетии произвольный.)

16.6. Нарисуйте фигуру, гомотетичную: а) тетраэдру; б) кубу; в) правильной четырехугольной пирамиде. (Центр и коэффициент гомотетии выберите сами.)

Б

16.7. Какая фигура получится в результате гомотетии: а) квадрата; б) окружности?

В

16.8. Дана точка A (x, y). Найдите координаты ее образа в результате гомотетии с центром: а) в начале координат и коэффициентом 2; б) начале координат и коэффициентом -3; в) точке P (0, 1) и коэффициентом 3; г) точке $(-2, 3)$ и коэффициентом -2.

16.9. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Пусть A — центр гомотетии, при которой B переходит в C. Как вычислить коэффициент гомотетии?

16.10. Нарисуйте отрезок AB. Известно, что точка B гомотетична точке A. Где находится центр этой гомотетии, если коэффициент этой гомотетии равен: а) 2; б) 1/3; в) -4?

16.11. В результате гомотетии точка A $(-1, 2)$ перешла в точку B. Каковы координаты центра гомотетии и ее коэффициент, если точка B имеет координаты: а) $(-2, 4)$; б) $(3, -6)$; в) $(0, 0)$; г) $(-1, 4)$; д) $(-4, 2)$; е) $(3, 3)$?

16.12. Используя гомотетию, докажите, что: а) средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна ее половине; б) три медианы треугольника пересекаются в одной точке; в) точка пересечения диагоналей трапеции лежит на средней линии ее оснований; г) точка пересечения боковых сторон трапеции лежит на продолжении средней линии оснований.

Задачи к пункту 16.4

Б

16.13. а) Пусть фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия k. С каким коэффициентом фигура F_1 подобна фигуре F_2?

б) Пусть фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия k_1, фигура F_3 подобна фигуре F_2 с коэффициентом подобия k_2. С каким коэффициентом фигура F_3 подобна фигуре F_1?

16.14. Докажите, что в результате подобия: а) середина отрезка переходит в середину отрезка; б) сохраняется перпендикулярность прямых; в) сохраняется параллельность прямых; г) окружность переходит в окружность, а круг — в круг.

16.15. Объясните, почему в результате подобия треугольник сохраняет свой вид по сторонам и углам.

16.16. Нарисуйте два прямоугольника. Используя транспортир, проверьте, подобны ли они.

16.17. Рамка картины имеет одну и ту же ширину. Подобны ли картина и картина в рамке?

16.18. Вы смотрите в бинокль на некоторый объект. Подобны ли объект и то, что вы видите?

16.19. Пусть перед вами два листа одинаковой формы с одного дерева. Как вы найдете отношение их площадей?

В

16.20. Рассматривается подобие треугольника. Что будет образом: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) центра вписанной окружности; д) центра описанной окружности?

16.21. Докажите, что подобны две любые окружности. Приведите другие примеры подобных фигур.

16.22. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 6 см и 2 см. Перпендикулярно большей стороне проведите прямую так, чтобы она отсекла прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см. а) Выясните, есть ли на рисунке подобные прямоугольники. б) Пусть эта прямая движется, оставаясь перпендикулярной большей стороне прямоугольника. Могут ли на рисунке получиться подобные прямоугольники? Разберите следующие случаи подобия: частичных прямоугольников; большего частичного прямоугольника целому; меньшего частичного прямоугольника целому.

16.23. Разделите прямоугольник на два прямоугольника так, чтобы получились пары подобных прямоугольников: а) одна; б) две; в) три.

16.24. Нарисуйте прямоугольник, а в нем диагональ. На этой диагонали возьмите точку. а) Из нее опустите перпендикуляры на две соседние стороны прямоугольника. Докажите, что на рисунке образовался прямоугольник, подобный данному. б) Опустите из нее перпендикуляры и на другие две стороны прямоугольника. Сколько на этом рисунке прямоугольников, подобных данному?

16.25. Нарисуйте прямоугольник. Отметьте внутри него любую точку, не лежащую на диагонали. Проведите из нее перпендикуляры на две соседние стороны. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

16.26. Можно ли разбить квадрат на два подобных прямоугольника?

16.27. а) Может ли средняя линия прямоугольника отсечь от него прямоугольник, подобный данному?

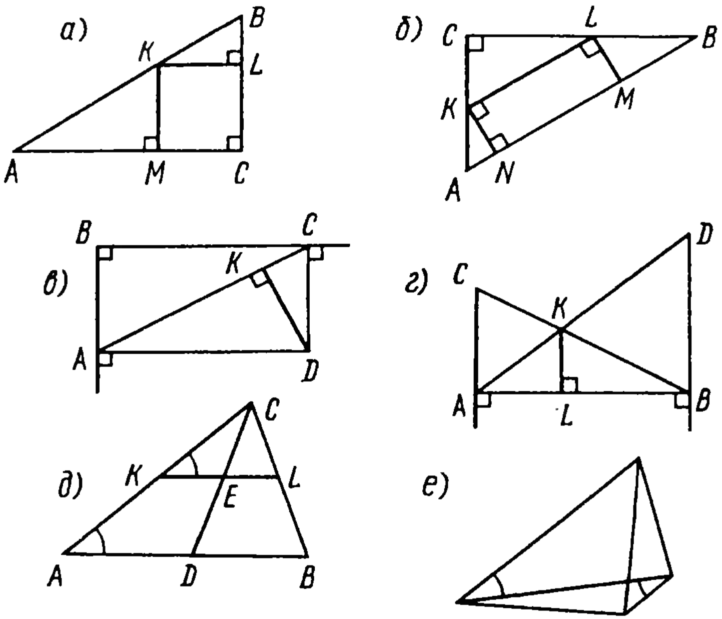


Рис. 355

б) Могут ли обе средние линии прямоугольника отсечь от него прямоугольник, подобный данному?

Задачи к пункту 16.5

А

16.28. Укажите пары подобных треугольников на рис. 355, *а* — *е*.

16.29. В треугольнике проведена средняя линия. а) Докажите, что она отсекает от него треугольник, подобный данному. Чему равен коэффициент этого подобия? б) Обобщите это утверждение. в) Проверьте обратное утверждение.

16.30. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Обобщите это утверждение.

16.31. На одной стороне угла отложили равные отрезки и через их концы провели параллельные хорды. До-

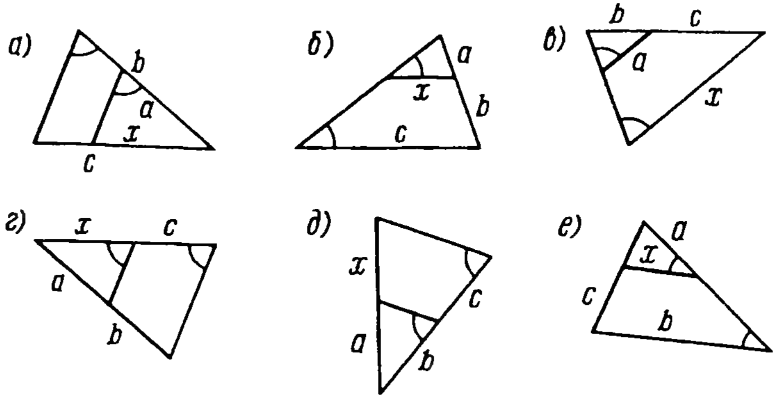


Рис. 356

кажите, что на другой стороне угла отложатся равные отрезки. Обобщите это утверждение. (Результат, полученный в этой задаче, называют теоремой Фалеса по имени знаменитого древнегреческого мыслителя и общественного деятеля Фалеса Милетского — ок. 625 — ок. 547 до н. э.)

16.32. Бывают ли на Луне затмения: а) солнечные; б) земные?

В

16.33. Докажите признаки подобия треугольников: а) прямоугольных; б) равнобедренных.

16.34. Чему равен неизвестный отрезок x на рис. 356, *а* — *е*.

16.35. Один конец отрезка лежит на данной прямой, а другой конец удален от нее на расстояние d. Чему равно расстояние от прямой до: а) середины отрезка; б) точки, делящей его в отношении $2 : 1$; в) точки, делящей его в отношении $p : q$?

16.36. Один конец отрезка удален от прямой на расстояние a, а другой конец отрезка удален от этой же прямой на расстояние b. Ответьте на те же вопросы, что и в предыдущей задаче.

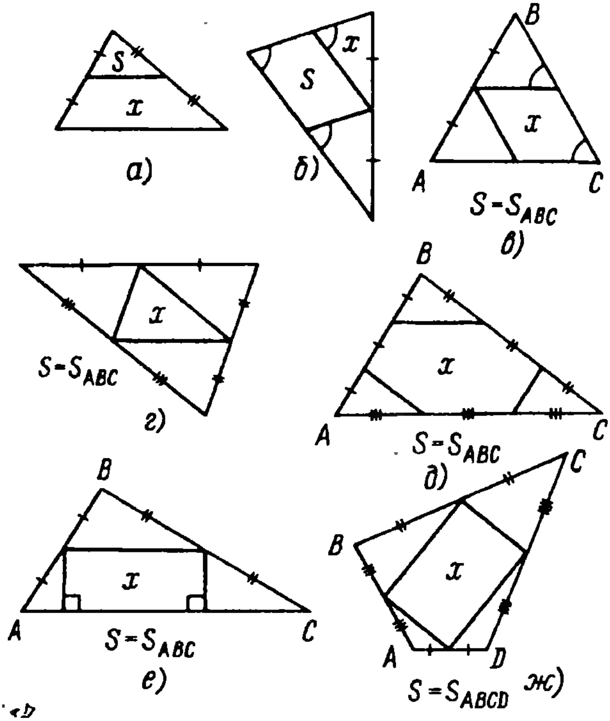


Рис. 357

16.37. Какую часть составляет площадь x от площади S на рис. 357, *а* — *ж*.

16.38. В треугольнике ABC провели его высоты AK и CL, а затем соединили отрезком точки K и L. Найдите на этом рисунке подобные треугольники.

Задачи к пункту 16.8

Б

16.39. Как с помощью подобия можно вычислить: а) расстояние до недоступной точки; б) расстояние между двумя недоступными точками; в) высоту объекта?

16.40. Как определить, на каком удалении от вас находится человек, идущий перпендикулярно линии наблюдения? В одной из книг Я. И. Перельмана дается такой ответ: «Закройте левый глаз, вытяните руку вперед и отогните большой палец. Уловив момент, когда палец прикроет фигуру идущего вдали человека, закройте правый глаз, а левый откройте и сосчитайте, сколько шагов сделает человек до того момента, когда палец вновь прикроет фигуру. Увеличив полученное число в 10 раз, вы узнаете расстояние от него в шагах».

На чем основан такой прием?

16.41. Из куска проволоки нужно сделать треугольник заданной формы. Каким образом?

В

16.42. Постройте прямоугольный треугольник по заданному: а) отношению катетов; б) отношению катета к гипотенузе; в) периметру.

16.43. Постройте квадрат, вписанный в данный: а) треугольник; б) ромб; в) сегмент. (Все вершины квадрата должны лежать на границе данной фигуры.)

16.44. В данный сектор впишите: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) окружность.

16.45. Постройте треугольник по двум углам: а) и высоте из вершины третьего угла; б) медиане из вершины третьего угла; в) биссектрисе из вершины третьего угла; г) периметру; д) радиусу описанной окружности; е) радиусу вписанной окружности.

16.46. Постройте: а) квадрат наибольшей площади, расположенный в данном равностороннем треугольнике; б) равносторонний треугольник наибольшей площади, расположенный в данном равнобедренном треугольнике.

Задачи к пункту 16.9

Б

16.47. Предположим, вам сказали, что для человека ростом 165 см считается нормальным вес 57 кг. Ваш рост 175 см. Какой вес будет для вас нормальным?

16.48. а) Вы хотите узнать, во сколько раз яйцо страуса весит больше, чем яйцо курицы, а весов нет. Можно ли выйти из положения?

б) Апельсины были двух размеров (в среднем). Как определить, во сколько раз более крупные должны стоить больше, чем менее крупные?

16.49. Вы начистили 10 кг картофеля. Как, ничего не взвешивая, оценить, сколько картофеля получилось «на выходе»?

16.50. а) Лилипуты из романа Дж. Свифта захотели накормить Гулливера досыта. Что они могли измерить для выполнения этого намерения?

б) Могло ли убить Гулливера яблоко, упавшее на него с дерева в стране великанов?

Учебное издание

АЛЕКСАНДРОВ Александр Данилович
ВЕРНЕР Алексей Леонидович
РЫЖИК Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ-9

Учебное пособие

Зав. редакционно-издательским отделом *Г. Лазарева*

Редактор *И. Шишкова*

Художник *Ю. Федичкин*

Художественный редактор *В. Пономаренко*

Технический редактор *С. Шкляр*

Корректоры *Н. Новикова, О. Рогачева*

Оригинал-макет сверстан
в компьютерном центре МИРОСа *Ж. Алексеевой*

Н/К

Изд № Ф30 (03). Подписано в печать 21.07.97. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Объем 22 печ. л. Тираж 5000 экз. Заказ 3086.
Цена договорная

Московский институт
развития образовательных систем

109004, Москва, ул. Нижняя Радищевская, д. 10

ТОО «ЧеРо»
Редакционно-издательский отдел:
Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, комн. 208
тел. 241-3390, 241-18-69
Отдел реализации:
Москва, Ломоносовский пр-т, 27Б
тел./факс: 938-2346

Великолукская городская типография Уприинформпечати
Псковской области, 182100, г. Великие Луки,
ул. Полиграфистов, 78/12